

Beiträge der Strömungen des intergalaktischen Mediums  
von Galaxienhaufen zum Sunyaev-Zeldovich-Effekt

**Diplomarbeit**

vorgelegt von  
**Jens Chluba**  
aus  
Tralee (Irland)

angefertigt  
an der Universitäts-Sternwarte  
der Georg-August-Universität zu Göttingen  
2001



## *Die Sterne*

*Ich sehe oft um Mitternacht,  
wenn ich mein Werk getan  
und niemand mehr im Hause wacht,  
die Stern am Himmel an.*

*Sie gehn da, hin und her, zerstreut  
als Lämmer auf der Flur;  
in Rudeln auch, und aufgereiht  
wie Perlen an der Schnur;  
und funkeln alle weit und breit,  
und funkeln rein und schön;  
ich seh die große Herrlichkeit,  
und kann nicht satt mich sehn...*

*Dann saget unterm Himmelszelt  
mein Herz mir in der Brust;  
Es gibt was Bessers in der Welt  
als all ihr Schmerz und Lust.*

Matthias Claudius



# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Einleitung</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>Grundlagen</b>	<b>5</b>
2.1	Definitionen . . . . .	5
2.2	Speziell relativistische Beziehungen . . . . .	6
2.3	Kosmologie . . . . .	8
2.4	Plancksches Strahlungsgesetz . . . . .	12
2.5	Thomsonstreuung . . . . .	14
2.6	Comptonstreuung . . . . .	15
<b>3</b>	<b>Der Sunyaev-Zeldovich-Effekt</b>	<b>19</b>
3.1	Thermischer Sunyaev-Zeldovich-Effekt . . . . .	19
3.2	Kinetischer Sunyaev-Zeldovich-Effekt . . . . .	24
3.3	Bestimmung der Hubble-Konstanten . . . . .	25
<b>4</b>	<b>Streuung polarisierter Strahlung</b>	<b>29</b>
4.1	Polarisation . . . . .	29
4.2	Stokesparameter . . . . .	30
4.3	Thomson-Streumatrix . . . . .	33
<b>5</b>	<b>Streuung der Photonen des Mikrowellenhintergrundes</b>	<b>37</b>
5.1	Wahl der Bezugssysteme . . . . .	37
5.2	Berechnung des gestreuten Stokesvektors . . . . .	40
5.3	Berechnung der Polarisation . . . . .	41
5.4	Numerische Rechnungen . . . . .	43
5.5	Relative Intensitätsänderung . . . . .	45
<b>6</b>	<b>Kinetische Signatur durch Rotation</b>	<b>49</b>
6.1	Kinetische Signaturen . . . . .	50
6.2	Rotierende Elektronenscheibe . . . . .	50
6.3	Rotierender Galaxienhaufen . . . . .	52
6.4	Modifiziertes Rotationsprofil . . . . .	61
<b>7</b>	<b>Polarisationssignatur durch Rotation</b>	<b>67</b>
7.1	Polarisationssignaturen . . . . .	67
7.2	Polarisationssignatur eines Galaxienhaufens . . . . .	68
<b>8</b>	<b>Zusammenfassung</b>	<b>81</b>
<b>A</b>	<b>Wichtige Funktionen</b>	<b>83</b>
A.1	$\Gamma$ -Funktion . . . . .	83
A.2	Modifizierte Besselfunktionen $K_m$ und $I_q$ . . . . .	83

<b>Literaturverzeichnis</b>	<b>85</b>
<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>90</b>
<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>91</b>

# Kapitel 1

## Einleitung

Die kosmische Mikrowellenhintergrund (CMB<sup>1</sup>) wurde 1965 von *Penzias* und *Wilson* [1] als nicht-instrumentelles, isotropes Rauschen mit einer Strahlungstemperatur von 3 K entdeckt. Diese Hintergrundstrahlung interpretierten *Dicke et al.* [2] als Überbleibsel eines heißen Urknalls. Damit wurde die CMB-Strahlung neben der Hubble-Expansion [3] und der Erklärung der relativen Häufigkeiten von leichten Elementen durch *Gamov* [4] eine der wichtigsten Stützen der Urknalltheorie.

Untersuchungen mit dem FIRAS<sup>2</sup> Instrument des COBE<sup>3</sup>-Satelliten ergaben, daß der kosmische Mikrowellenhintergrund das Spektrum eines schwarzen Strahlers der Temperatur  $T_0 = 2.728 \pm 0.004$  K [6] hat. Nach Abzug der Dipolanisotropie ( $\Delta T/T_0 \sim 10^{-3}$ ), welche eine Folge der Erdbewegung<sup>4</sup> relativ zum CMB ist, zeigten sich Anisotropien von einigen Mikrokkelvin in der Temperatur des CMB. Diese Anisotropien können verschiedene Ursachen haben, was im folgenden verdeutlicht werden soll.

Im anfänglich sehr heißen und dichten Kosmos befinden sich Materie und Strahlung im thermodynamischen Gleichgewicht. Die Schwankungen in der Temperatur der Strahlung sind dann im allgemeinen an die primordialen<sup>5</sup> Fluktuationen in der Materiedichte gekoppelt. Mit zunehmender Ausdehnung des Universums kühlt sich dieses langsam ab, bis sich schließlich, etwa 300 000 Jahre<sup>6</sup> nach dem Urknall, aus den ursprünglich ionisierten Plasma erste neutrale Atome bilden (Rekombination) und der Kosmos damit durchsichtig wird. Die Strahlung ( $T \sim 3000$  K) kann sich nun nahezu ungestört im Universum ausbreiten und die Informationen über die Keime der von uns heute beobachteten Strukturen davontragen. Diese Strahlung empfangen wir infolge der Expansion des Universums stark rotverschoben ( $T_0 \sim 3$  K) als CMB.

Auf dem Weg durch das Universum bleibt die CMB-Strahlung nicht unbeeinflusst von den Strukturen der Materie. Neben den primordialen Anisotropien entstehen sekundäre Anisotropien, deren Ursachen sich grob auf zwei Arten von Effekten zurückführen lassen: Gravitationseffekte (z.B. Sachs-Wolfe-Effekt, Gravitationslinseneffekt; siehe Übersichtsartikel von *White et al.* [7], *Cooray et al.* [8]) und Comptonstreuung. Hier soll näher auf die Comptonstreuung eingegangen werden.

---

<sup>1</sup>Cosmic Microwave Background

<sup>2</sup>Far Infrared Absolute Spectrophotometer [5]

<sup>3</sup>Cosmic Background Explorer [5]

<sup>4</sup>Diese besteht aus der Überlagerung von der Bewegung der Erde um die Sonne, der Bewegung der Sonne um das Zentrum unserer Galaxie, der Bewegung der Milchstraße relativ zum Schwerpunkt der lokalen Gruppe und der Bewegung der lokalen Gruppe relativ zum CMB.

<sup>5</sup>primordial (lat.) ursprünglich; vor Beginn der Nukleosynthese in den Sternen

<sup>6</sup>Die kosmologische Rotverschiebung  $z$  ist eine Folge der Hubble-Expansion. In Abhängigkeit von der zugrundeliegenden Kosmologie läßt sich die Zeit  $t$  als Funktion dieser Rotverschiebung ausdrücken:  $t = F(z)$ . Typischerweise entspricht  $z = 0$  der Gegenwart,  $z \sim 1$  der Hälfte des Alters des Universums (10 – 12 Milliarden Jahre) und  $z \sim 1000$  dem Zeitpunkt der Rekombination des ursprünglich ionisierten Plasmas im Universum.

Zwischen  $z = 10-20$  kommt es zur **Reionisation** der Materie des Universums, wahrscheinlich durch die Strahlung der ersten astrophysikalischen Objekte<sup>7</sup>. Dadurch entstehen freie Elektronen, welche mit der CMB-Strahlung in Wechselwirkung treten können. Die Comptonstreuung der Photonen des CMB führt dabei zu einer zur Verschmierung der primordialen Anisotropien, zum anderen zu neuen Anisotropien. Ein wichtiger Effekt in diesem Zusammenhang ist der **Sunyaev-Zeldovich-Effekt** (SZE) [9, 10], der auf Comptonstreuung der Photonen des CMB an freien Elektronen in Galaxienhaufen beruht und Gegenstand der vorliegenden Arbeit ist (Kap.3). Der SZE bewirkt eine Änderung der Temperatur des CMB im Rayleigh-Jeans-Bereich in der Richtung von Galaxienhaufen um einige Mikrokkelvin. Über den SZE lassen sich weit entfernte Galaxienhaufen indirekt durch ihre Signatur im CMB beobachten (siehe Übersichtsartikel von *Rephaeli* [11]).

Die Beiträge der einzelnen genannten Effekte zu den Anisotropien des CMB sind stark von den verschiedenen kosmologischen Parametern abhängig, wie beispielsweise der Hubble-Konstanten  $H_0$ , der mittleren Materiedichte  $\Omega_m$ , der Vakuumenergiedichte  $\Omega_\Lambda$ , sowie den genauen Zeitpunkten der Rekombination und Reionisation, dem Anteil nichtbaryonischer Materie und der Inflation. Durch Simulationen auf Basis von linearer Störungstheorie lassen sich die Spektren der Anisotropien (Multipolmomente) in der CMB für verschiedene kosmologische Modelle berechnen.<sup>8</sup> Durch genaue Messungen des tatsächlichen Spektrums der Anisotropien läßt sich zwischen verschiedenen kosmologischen Modellen unterscheiden. Mit den Ballon-Experimenten BOOMERANG<sup>9</sup> und MAXIMA<sup>10</sup> wurde hierzu nach COBE in jüngster Vergangenheit Pionierarbeit mit interessanten Ergebnissen geleistet [13, 14].

Auch zukünftige Missionen zur Messung der Anisotropien sind schon geplant: Im Juli 2001 wird die Satellitenmission MAP<sup>11</sup> gestartet, welche eine im Vergleich zu COBE um den Faktor 10 genauere Kartierung des CMB liefern soll. An Bord von MAP sind auch Polarimeter zur Bestimmung der Anisotropien in der linearen Polarisation des CMB vorgesehen. Die Entstehung von Polarisation kann ebenfalls simuliert werden und bietet eine weitere Möglichkeit zur Unterscheidung zwischen einzelnen kosmologischen Modellen [16]. Die Satellitenmission PLANCK<sup>12</sup>, die im Jahre 2007 gestartet werden soll, wird mit einer nochmals gesteigerten Winkelauflösung und in anderen Frequenzbändern das Spektrum der Anisotropien messen und damit weitere wichtige Erkenntnisse liefern.

Bei der Untersuchung und Interpretation der Anisotropien von Temperatur und Polarisation des CMB ist die genaue Kenntnis zusätzlicher Vordergrundeffekte von großer Bedeutung. So liefert zum Beispiel der Staub innerhalb unserer Galaxie, der durch die ultraviolette Strahlung von Sternen auf Temperaturen zwischen 10 – 200 K geheizt wird, einen messbaren Beitrag zum Gesamtsignal im Mikrowellenbereich. Da das Streulicht von Staub teilweise linear polarisiert ist, wird die Deutung von Polarisationsmessungen durch diesen ebenfalls erschwert [17]. Die genaue Kenntnis der Verteilung dieser flächenhaften Quellen ist daher sehr wichtig für die Analyse der Messdaten. Auch andere Radioquellen (z.B. Radiogalaxien, Radiostrahlung von Galaxienhaufen) tragen zum „astrophysikalischen Vordergrund“ bei. In dieser Arbeit sollen die Beiträge lokaler Strömungen des intergalaktischen Mediums von Galaxienhaufen (ICM<sup>13</sup>) zum SZE als weiterer möglicher astrophysikalischer Vordergrund untersucht werden. Strömungen mit Pekuliargeschwindigkeiten relativ zum CMB werden durch Inhomogenitäten der

<sup>7</sup>sog. Pop-III-Sterne sowie vermutlich Quasare und AGN

<sup>8</sup>Gewöhnlich wird hierzu das Programm CMBFAST von *Seljak* und *Zaldarriaga* [12] verwendet.

<sup>9</sup>Balloon Observation Of Millimetric Extragalactic Radiation and Geophysics [13]

<sup>10</sup>Millimeter Anisotropy eXperiment IMaging Array [14]

<sup>11</sup>Microwave Anisotropy Probe [15]

<sup>12</sup>Name zu Ehren von *Max Planck*

<sup>13</sup>Intra-Cluster Medium



---

Materieverteilung im Universum auf Skalen  $R \leq 100$  Mpc ( $1 \text{ Mpc} \approx 3.09 \cdot 10^{22} \text{ m}$ ) sowie durch die Dynamik der strukturbildenden Prozesse induziert [18]. Drehimpulsaustausch bei der Wechselwirkung von Galaxienhaufen oder Transportprozesse bei der Bildung von Galaxienhaufen könnten auch rotierende Galaxienhaufen erzeugt haben. Eine Rotation des ICM steht nicht im Widerspruch zum kosmologischen Prinzip, welches ein Universum mit Netto-Drehimpuls Null impliziert. Gravitativ gebundene Systeme auf der Skala von Sternen und Planeten bis zu Galaxien ( $\sim 10$  kpc) weisen generell innere Strömungen und Rotation auf. Deshalb soll hier insbesondere eine mögliche Rotation des ICM in Hinblick auf messbare Signaturen untersucht werden.

In dieser Arbeit werden die relative Intensitätsänderung und Polarisation des CMB auf Grund des SZE eines rotierenden intergalaktischen Mediums behandelt. Dabei soll insbesondere erstmals geklärt werden, wie sich Rotationen des ICM auf die Interpretation von SZE-Messungen und die Morphologie des Temperaturdekrements auswirken.

Zu Beginn dieser Arbeit, in Kapitel 2, werden die benötigten physikalischen Grundlagen dargestellt. In Kapitel 3 findet man eine detaillierte Beschreibung des SZE und seiner astrophysikalischen Anwendungen. Die Thomsonstreuung polarisierter Strahlung wird in Kapitel 4 erläutert und findet in Kapitel 5 Anwendung bei der Beschreibung der Streuung des CMB am Elektronenmedium von Galaxienhaufen. In den Kapiteln 6 und 7 werden die Beiträge der Rotation des intergalaktischen Mediums von Galaxienhaufen zur relativen Intensitätsänderung und zur Polarisation des CMB in Richtung von Galaxienhaufen untersucht und diskutiert. Hierbei steht eine sorgfältige Bewertung der gewonnenen Ergebnisse in Hinblick auf ihre Messbarkeit im Mittelpunkt.

In der vorliegenden Arbeit sind besonders wichtige Formeln eingerahmt. Im Anhang findet man ein Verzeichnis der verwendeten Abkürzungen.



# Kapitel 2

## Grundlagen

In diesem Kapitel werden die für die weiteren Rechnungen wichtigen physikalischen Grundlagen behandelt.

### 2.1 Definitionen

Um Mißverständnisse in den Schreibweisen für Konstanten Vektoren, Vierervektoren und Matrizen zu vermeiden, werden diese hier vorab festgelegt.

#### Naturkonstanten und astronomische Maßeinheiten

In physikalischen Gleichungen tauchen bestimmte Konstanten sehr häufig auf. Um zu vermeiden, daß man nach jeder Gleichung zitieren muß, welche Größen in dieser enthalten sind, werden hier einige Bezeichner eindeutig festgelegt:

Name	Symbol	Wert	SI-Einheit
Lichtgeschwindigkeit	$c$	299 792 458	$\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$
Boltzmann-Konstante	$k_B$	1.380 650 3(24)	$10^{-23} \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$
Plancksches Wirkungsquantum	$h$	6.626 068 76(52)	$10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$
Elementarladung	$e$	1.602 176 462(63)	$10^{-19} \text{ C}$
Ruhemasse des Elektrons	$m_e$	9.109 381 88(72)	$10^{-31} \text{ kg}$
Ruhemasse des Protons	$m_p$	1.672 621 58(13)	$10^{-27} \text{ kg}$
Thomson-Wirkungsquerschnitt	$\sigma_T$	6.652 458 529	$10^{-25} \text{ cm}^2$
Klassischer Elektronenradius	$r_e$	2.817 940 28	$10^{-15} \text{ m}^2$
Stefan-Boltzmann-Konstante	$S$	5.670 400	$10^{-8} \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-4}$

**Tabelle 2.1:** Wichtige Konstanten aus den Physikalische Blätter, März 2000 [19]. Die Zahlen in Klammern geben die Unsicherheit in den letzten Stellen des Wertes an.

Name	Symbol	Wert	SI-Einheit
Sonnenmasse	$M_\odot$	1.989 1	$10^{30} \text{ kg}$
Sonnenleuchtkraft	$L_\odot$	3.826 8	$10^{26} \text{ W}$
Hubble-Konstante	$H_0$	$65 \pm 15$	$\text{km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$
Länge eines Parsecs	pc	3.085 678	$10^{16} \text{ m}$
Länge eines Lichtjahres	Lj	9.460 530	$10^{15} \text{ m}$

**Tabelle 2.2:** Astronomische Maßeinheiten aus Weigert [20].

## Vektoren und Vierervektoren

Im allgemeinen soll gelten, daß  $\mathbf{x}$  einen dreidimensionalen Vektor darstellt, während  $x$  einen Vierervektor im Minkowskiraum bezeichnet. Letzter hat die Form:

$$x = (x_0, \mathbf{x}) . \quad (2.1)$$

Das Viererskalarprodukt wird wie gewohnt durch

$$ab = a_0 b_0 - \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \quad (2.2)$$

berechnet. Des weiteren sollen die Viererimpulse von massebehafteten Teilchen mit  $p$ , die von Photonen mit  $k$  bezeichnet werden. Dabei gilt:

$$p = p_0 \cdot (1, \boldsymbol{\beta}) \quad (2.3)$$

$$k = k_0 \cdot (1, \mathbf{n}) , \quad (2.4)$$

worin  $\boldsymbol{\beta}$  der auf die Lichtgeschwindigkeit  $c$  normierte Geschwindigkeitsvektor des Teilchens und  $\mathbf{n}$  der normierte Vektor in Richtung des Photonenimpulses sind. Die Nullkomponenten der Viererimpulse sind durch

$$p_0 = mc \quad (2.5a)$$

$$k_0 = \frac{h\nu}{c} \quad (2.5b)$$

gegeben. Hierin sind  $\nu$  die Frequenz des Photons,  $h$  das Plancksche Wirkungsquantum und  $m$  die relativistische Masse, welche durch

$$m = \gamma m_0 \quad (2.6)$$

gegeben ist. Dabei sind  $m_0$  die Ruhemasse des Teilchens und  $\gamma$  der Lorentzfaktor, welcher als

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} \quad (2.7)$$

definiert ist. Es wird stets explizit angegeben, wenn es sich in Gleichungen um die Ruhemasse  $m_0$  handelt. [21, 22]

## Matrizen

Bei der Beschreibung des Streuprozesses von Photonen an Elektronen werden die Stokesvektoren mit Hilfe von  $4 \times 4$  Matrizen transformiert (vgl. Abschnitt 4.3). Matrizen seien allgemein durch einen Großbuchstaben mit Dach gekennzeichnet. Als Beispiel diene die Transformationsmatrix für die Stokesvektoren

$$\hat{L} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\chi & \sin 2\chi & 0 \\ 0 & -\sin 2\chi & \cos 2\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

unter Drehung der Polarisationsbasis um den Winkel  $\chi$  (vgl. Abschnitt 4.2).

## 2.2 Speziell relativistische Beziehungen

In diesem Abschnitt werden wichtige Beziehungen der speziellen Relativitätstheorie zusammengestellt.

## Viererquadrat

Bei Vierervektoren kann man bereits an deren Definition einige Eigenschaften ablesen. Für den Viererimpuls eines massebehafteten Teilchens gilt allgemein

$$p^2 = m_0^2 c^2. \quad (2.8)$$

$p^2$  ist also eine vom Bezugssystem unabhängige Konstante. Für den Viererimpuls eines Photons läßt sich analog schreiben

$$k^2 = 0. \quad (2.9)$$

Man bezeichnet daher Vierervektoren, deren Viererquadrat = 0 ist, als **lichtartig**. [21]

## Lorentz-Transformation

Betrachtet man zwei Inertialsysteme  $K$  und  $K'$ , die sich gegeneinander mit der konstanten Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegen, so hat die Transformation des Vierervektors  $x$  vom System  $K$  nach  $K'$  die Form

$$x' = \hat{\Lambda}(\beta) x \quad (2.10)$$

Die **Lorentz-Matrix**  $\hat{\Lambda}(\beta)$  hängt im allgemeinen von der Orientierung der Koordinatenachsen der Systeme zueinander ab. Liegen die Achsen von  $K$  und  $K'$  parallel zueinander und bewegt sich der Ursprung von  $K'$  in positive  $x$ -Richtung, so ist  $\hat{\Lambda}(\beta)$  durch

$$\hat{\Lambda}(\beta) = \begin{pmatrix} \gamma & -\beta\gamma & 0 & 0 \\ -\beta\gamma & \gamma & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

gegeben. In diesem Fall spricht man von einem **Boost** in  $x$ -Richtung. Den allgemeinen Fall kann man aus (2.11) durch Drehung der Koordinatenachsen um entsprechende Winkel erhalten. In anderer Form kann man allgemein auch

$$x'_0 = \gamma(x_0 - \mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta}) \quad (2.12a)$$

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + (\gamma - 1) \frac{(\mathbf{x} \cdot \boldsymbol{\beta})\boldsymbol{\beta}}{\beta^2} - \gamma\boldsymbol{\beta}x_0 \quad (2.12b)$$

schreiben. Die inverse Transformation erhält man durch Ersetzen von  $\mathbf{v}$  durch  $-\mathbf{v}$ . [21, 22]

## Doppler- und Aberrationsformel

Der klassische Dopplereffekt bei Schallwellen äußert sich in einer Veränderung der Frequenz des Signals in Abhängigkeit von der Bewegungszustand der Quelle bzw. des Empfängers. Für Licht findet man einen ähnlichen Effekt, der sich aus folgenden Überlegungen ergibt: Betrachtet man zwei Inertialsysteme  $K$  und  $K'$ , welche parallele Koordinatenachsen haben und sich in  $x$ -Richtung mit  $\mathbf{v}$  relativ zueinander bewegen, so kann man ein sich unter dem Winkel  $\theta$  zur  $x$ -Achse in der  $x, z$ -Ebene ausbreitendes Photon  $k = k_0(1, \cos \theta, \sin \theta, 0)$  mit einem Boost nach (2.11) in das System  $K'$  transformieren. Aus der zeitlichen Komponente von  $k'$  erhält man die **Dopplerformel**

$$\nu' = \gamma\nu(1 - \beta \cos \theta), \quad (2.13)$$

welche das relativistische Analogon zum klassischen Dopplereffekt von Schallwellen beschreibt: Bewegen sich Quelle und Empfänger aufeinander zu, so ist das Licht blau- andernfalls rotverschoben. Es gibt im Gegensatz zum klassischen Dopplereffekt keinen Unterschied mehr zwischen Bewegung der Quelle bzw. des Empfängers.

Die Ausbreitungsrichtung des Photons in  $K'$  wird durch die **Aberrationsformeln** beschrieben. Diese ergeben sich aus den räumlichen Komponenten von  $k'$  als

$$\cos \theta' = \frac{\cos \theta - \beta}{1 - \beta \cos \theta} \quad \sin \theta' = \frac{\sqrt{1 - \beta^2} \sin \theta}{1 - \beta \cos \theta} \quad (2.14)$$

Bewegt sich das Photon in  $K$  genau entlang der  $x$ -Achse, so ist dies auch in  $K'$  der Fall.

Die obigen Formeln werden später benötigt, um das Spektrum der kosmischen Mikrowellenhintergrundstrahlung in ein bewegtes Bezugssystem zu transformieren. [21]

### Transformationsverhalten der spektralen Intensität

Als nächstes wird das Transformationsverhalten der spektralen Intensität  $I_\nu$  untersucht. Dazu geht man von folgender Beziehung für die Energiedichte  $u_\nu$  der Photonen im Phasenraum aus:

$$h\nu f p^2 dp d\Omega = u_\nu(\Omega) d\nu d\Omega.$$

Hierin ist  $f$  die Phasenraumdichte. Die Energiedichte  $u_\nu$  ist über  $u_\nu = I_\nu/c$  mit der Intensität verknüpft. Für den Betrag des Impulses  $p$  eines Photons gilt:  $p = h\nu/c$ . Hieraus folgt:

$$\frac{h^4}{c^3} \nu^3 f d\nu d\Omega = \frac{1}{c} I_\nu d\nu d\Omega.$$

Dies zeigt, daß  $I_\nu/\nu^3$  das gleiche Transformationsverhalten wie die Phasenraumdichte  $f$  hat. Für  $f$  gilt:

$$f = \frac{dN}{d^3x d^3p}.$$

Die Teilchenzahl  $dN$  ist eine Lorentzinvariante. Das gleiche gilt auch für das Phasenraumvolumen  $d^3x d^3p$ , da die Kontraktion von  $d^3x'$  die Dilatation von  $d^3p'$  aufhebt. Damit ist insgesamt auch  $f$  lorentzinvariant. Daraus folgt:

$$\frac{I_\nu}{\nu^3} \equiv \text{Lorentzinvariante}. \quad (2.15)$$

Hieraus ergibt sich, daß der Polarisationsgrad und die relative Intensitätsänderung ebenfalls Lorentzinvarianten sind:

$$P_\nu = \frac{I_{\nu,\text{pol}}}{I_\nu} \equiv \text{Lorentzinvariante} \quad (2.16a)$$

$$\frac{\Delta I_\nu}{I_\nu} \equiv \text{Lorentzinvariante} \quad (2.16b)$$

Mit (2.16a) ist auch die über die Frequenz integrierte Polarisation  $P = \int P_\nu d\nu$  lorentzinvariant. [23]

## 2.3 Kosmologie

Auf astronomischen Skalen wird die Dynamik der Materie durch die Gravitation bestimmt. Die Gravitation wird durch die allgemeine Relativitätstheorie beschrieben. Durch einschränkende Annahmen kann man mit Hilfe dieser einfache Modelle des Kosmos aufstellen. In diesem Kapitel wird auf die Friedmann-Robertson-Walker-Kosmologie (FRW-Kosmologie) eingegangen.

## Standardmodell des Kosmos

Auf Skalen von einigen Kiloparsec ( $1 \text{ kpc} \approx 3.09 \cdot 10^{19} \text{ m}$ ) findet man Galaxien, die typischerweise aus  $10^{10}$  Sternen aufgebaut sind. Galaxien wiederum treten in Ansammlungen auf: Bei einer Zahl von  $< 50$  Galaxien spricht man von Gruppen, bei einer Anzahl  $\geq 50$  von Galaxienhaufen. Die Größe von Galaxienhaufen liegt typischerweise im Bereich von  $2 - 5 \text{ Mpc}$ . Die nächstgrößeren Strukturen sind die Superhaufen, welche aus Galaxienhaufen aufgebaut sind und eine Größe von  $10 - 20 \text{ Mpc}$  aufweisen. Diese Superhaufen sind über sogenannte Mauern miteinander verbunden, welche große Bereiche ( $\sim 50 \text{ Mpc}$ ) von scheinbarer Leere, die sogenannten Voids, umspannen.

Modelle des Kosmos sollen die zeitliche Entwicklung des Universums auf Skalen beschreiben, die noch größer sind als die oben genannten Strukturen. Man geht daher von der Vereinfachung aus, daß die Verteilung der Materie homogen und isotrop ist. Homogen bedeutet, daß die Dichte der Materie näherungsweise konstant ist. Die Isotropie impliziert, daß es keine ausgezeichnete Richtung im Universum gibt. Man spricht in diesem Zusammenhang auch vom **kosmologischen Prinzip**, nach welchem der Mensch ein nicht ausgezeichneter Beobachter des Universums ist.

Die Homogenität und Isotropie stellt eine starke Einschränkung an die Raumstruktur des Kosmos dar. Die Metrik, welche aus diesen Forderungen folgt, ist die **Robertson-Walker-Metrik** (RW-Metrik)

$$ds^2 = c^2 dt^2 - R(t)^2 [d\chi^2 + f_k(\chi) (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)] . \quad (2.17)$$

Hierin ist  $R(t)$  der **kosmische Skalenfaktor**,  $\chi$  die Abstandskoordinate,  $\theta$  und  $\varphi$  Winkel in Kugelkoordinaten. Die Funktion  $f_k(\chi)$  ist durch

$$f_k(\chi) = \begin{cases} \sin \chi & \text{für } k = 1 \\ \chi & \text{für } k = 0 \\ \sinh \chi & \text{für } k = -1 \end{cases} \quad (2.18)$$

gegeben, wobei  $k = 1$  einen Raum positiver,  $k = 0$  verschwindender und  $k = -1$  negativer Krümmung bedeutet. Definiert man den dimensionslosen Skalenfaktor

$$a(t) = \frac{R(t)}{R_0} , \quad (2.19)$$

mit  $R_0 = R(t_0)$ , so kann man mit Hilfe der Einsteinschen Feldgleichungen mit **kosmologischer Konstanten**  $\Lambda$  aus der RW-Metrik (2.17) die Differentialgleichungen

$$\frac{\ddot{a}}{a} = -\frac{4\pi G}{3} (\rho + 3P) + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.20a)$$

$$\frac{\dot{a}^2}{a^2} = \frac{8\pi G}{3} \rho - \frac{k}{a^2 R_0^2} + \frac{\Lambda}{3} \quad (2.20b)$$

berechnen. Es wurde dabei  $c = 1$  gesetzt. Hierin sind  $\rho = \rho(t)$  bzw.  $P$  die ortsunabhängige, mittlere Energiedichte der Materie und der Strahlung bzw. der Druck. Zur Lösung von (2.20) muß man noch eine Zustandsgleichung  $P = P(\rho)$  hinzunehmen. Für nichtrelativistische Materie ist der Druck  $P$  gegen die Dichte  $\rho$  vernachlässigbar ( $P \ll \rho$ ).

Aus Gleichung 2.20b kann man direkt die sogenannte **kritische Dichte**  $\rho_c$  ablesen, bei der die Krümmung des Universums  $k = 0$  ist:

$$\rho_c = \rho + \frac{\Lambda}{8\pi G} = \frac{3}{8\pi G} \frac{\dot{a}^2}{a^2} . \quad (2.21)$$

Alle Dichten werden gewöhnlich in Einheiten der kritischen Dichte  $\rho_c(t_0)$  zum heutigen Zeitpunkt  $t_0$  definiert. [24, 25, 20]

## Hubble-Gesetz

Zur Bestimmung des Abstandes zwischen zwei Punkten legt man einen Punkt in den Koordinatenursprung. Wegen des kosmologischen Prinzips bleiben die grundlegenden Gleichungen dadurch unverändert. Der Abstand  $D$  zu einem zweiten Punkt ist dann gegeben durch

$$D = \int_0^{\chi} R(t) d\chi' = R(t) \chi.$$

Die Geschwindigkeit, mit der sich die Punkte auf Grund der Ausdehnung des Raumes relativ zueinander bewegen, ist durch

$$v = \dot{R} \chi = \frac{\dot{R}}{R} D \quad (2.22)$$

gegeben. Dies ist das **Hubble-Gesetz** mit der zeitabhängigen Hubble-Konstanten

$$H = \frac{\dot{R}}{R} = \frac{\dot{a}}{a}, \quad (2.23)$$

welches besagt, daß die Fluchtgeschwindigkeit  $v$  zweier Punkte im Universum proportional zu ihrer Entfernung  $D$  ist. Die Fluchtgeschwindigkeit ist eine Folge der Expansion des Raumes. Aus ihr ergibt sich die kosmologische Rotverschiebung  $z$ .

Man definiert den heutigen Wert der Hubble-Konstanten als  $H_0 = \dot{a}_0/a_0$ , mit  $a_0 = a(t_0)$ . Verschiedene Messungen legen den Wert von  $H_0$  auf  $65 \pm 15 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1} \cdot \text{Mpc}^{-1}$  fest. Die genaue Bestimmung der Hubble-Konstanten ist für die Kosmologie von großer Bedeutung. [20]

## Kosmologische Rotverschiebung

Ein Photon habe bei seiner Emission die Frequenz  $\nu_e$ . Betrachtet man dieses Photon nach einer Zeitspanne wieder, so besitzt es auf Grund der adiabatischen Expansion des Universums eine geänderte Frequenz  $\nu_b$ . Das Verhältnis der beiden Frequenzen ist über

$$\frac{\nu_e}{\nu_b} = \frac{a(t_b)}{a(t_e)}$$

mit dem Skalenfaktor  $a(t)$  verknüpft, wobei  $t_e$  der Zeitpunkt des Aussendens und  $t_b$  der des Empfangens ist. Die Rotverschiebung  $z$  ist als relative Frequenzänderung

$$z = \frac{\nu_e - \nu_b}{\nu_b}$$

definiert. Damit ist die **kosmologische Rotverschiebung** durch

$$z = \frac{a(t_b)}{a(t_e)} - 1 \quad (2.24)$$

gegeben. Die kosmologische Rotverschiebung wird durch die zeitliche Änderung von  $a(t)$  verursacht. Darüber hinaus gibt es auch andere Ursachen für Frequenzverschiebungen:

- Gravitationsrotverschiebung auf Grund der unterschiedlichen Gravitationsfelder am Ort der Quelle und des Empfängers.
- Doppler-Effekt als Folge der Relativbewegung von Quelle und Empfänger.

An dieser Stelle sei darauf hingewiesen, daß der kosmische Mikrowellenhintergrund als ruhend in der Hubble-Strömung betrachtet werden kann. Man kann diesen als Bezugssystem definieren, in welchem die Materie eine **Pekuliarbewegung**, d.h. eine Bewegung relativ zum Mikrowellenhintergrund, ausführt, wenn die Gradienten des lokalen Gravitationspotentials dazu Anlaß geben. [25, 26]



### Kosmologische Parameter

Die mittleren Dichten  $\rho$  und  $\rho_\Lambda = \Lambda/8\pi G$  legen die Geometrie des Raumes fest. Die Dichte  $\rho$  kann weiter als Summe von Materieanteil  $\rho_m(t)$  mit der nichtrelativistischen Zustandsgleichung  $P_m = 0$  und Strahlungsanteil  $\rho_r(t)$  mit der relativistischen Zustandsgleichung  $P_r = \rho_r(t)/3$  geschrieben werden. Für die einzelnen Anteile zur Gesamtdichte des Universums gilt:

$$\begin{aligned}\rho_m(t) &\propto a(t)^{-3} \\ \rho_r(t) &\propto a(t)^{-4} \\ \rho_\Lambda(t) &\propto \text{const}\end{aligned}$$

Unter Berücksichtigung der Abhängigkeit vom Skalenfaktor  $a(t)$  und der Beziehung (2.24) läßt sich für den ersten und letzten Term der rechten Seite von (2.20b)

$$\begin{aligned}\frac{8\pi G\rho}{3} + \frac{\Lambda}{3} &= \frac{8\pi G\rho_c(t_0)}{3} \left( \frac{\rho_m(t)}{\rho_c(t_0)} + \frac{\rho_r(t)}{\rho_c(t_0)} + \frac{\rho_\Lambda(t)}{\rho_c(t_0)} \right) \\ &= H_0^2 (\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_r(1+z)^4 + \Omega_\Lambda)\end{aligned}\quad (2.25)$$

schreiben. Hierin wurden  $\Omega_m$ ,  $\Omega_r$  und  $\Omega_\Lambda$  als

$$\Omega_m = \frac{8\pi G\rho_m(t_0)}{3H_0^2} \quad (2.26a)$$

$$\Omega_r = \frac{8\pi G\rho_r(t_0)}{3H_0^2} \quad (2.26b)$$

$$\Omega_\Lambda = \frac{8\pi G\rho_\Lambda(t_0)}{3H_0^2} = \frac{\Lambda}{3H_0^2} \quad (2.26c)$$

definiert. Die Energiedichte des Universums wird heute von nichtrelativistischer Materie dominiert ( $\Omega_m = 0.3 \pm 0.2$ ,  $\Omega_r \sim 10^{-4}$ ).

Der zweite Term der rechten Seite von (2.20b) kann als Beitrag der Krümmung des Raumes zur Gesamtdichte aufgefaßt werden. Dieser ist proportional zu  $a(t)^{-2}$ . Definiert man die dimensionslose Dichte

$$\Omega_R = -\frac{k}{a_0^2 R_0^2 H_0^2}, \quad (2.27)$$

so kann man die Gleichungen (2.20) für einen materiedominierten Kosmos ( $\rho_r \equiv 0$ ,  $P \equiv 0$ ) mit kosmologischer Konstanten  $\Lambda$  in die Form

$$\frac{\ddot{a}}{a} = H_0^2 [\Omega_\Lambda - \Omega_m(1+z)^3/2] \quad (2.28a)$$

$$\frac{\dot{a}}{a} = H_0 [\Omega_m(1+z)^3 + \Omega_R(1+z)^2 + \Omega_\Lambda]^{1/2} = H_0 E(z) \quad (2.28b)$$

bringen. Die Funktion  $E(z)$  taucht häufig in kosmologischen Rechnungen auf.

Im allgemeinen wird die Dichte  $\Omega_R$  durch  $\Omega_m$ ,  $\Omega_r$  und  $\Omega_\Lambda$  ausgedrückt:

$$\Omega_R = 1 - \Omega_m - \Omega_r - \Omega_\Lambda = 1 - \Omega. \quad (2.29)$$

Für ein flaches Universum ( $\Omega_R = 0$ ) stimmt die mittlere Dichte  $\Omega$  mit der kritischen Dichte überein:  $\Omega = \Omega_m + \Omega_r + \Omega_\Lambda = 1$ . [24, 26]

### Winkeldurchmesserdistanz

Ein Objekt, das den Eigendurchmesser  $d$  habe, befinde sich bei  $\chi$  und liege senkrecht zur Sichtlinie. An der RW-Metrik (2.17) liest man ab, daß der Winkel  $\psi$ , unter dem dieses Objekt von einem Beobachter bei  $\chi = 0$  gesehen wird, mit dem Eigendurchmesser über

$$d = R(t) f_k(\chi) \psi$$

verknüpft ist. Mit  $R(t) = R_0/(1+z)$  nach Gleichung (2.24) erhält man hieraus die sog. **Winkeldurchmesserdistanz**

$$D_A = \frac{R_0 f_k(\chi)}{1+z}, \quad (2.30)$$

welche den gemessenen, physikalischen Winkel  $\psi$  mit den Eigendurchmesser  $d$  verbindet.

Die Winkeldurchmesserdistanz ist von der Kosmologie, also von den Parametern  $H_0$ ,  $\Omega_m$ ,  $\Omega_r$  und  $\Omega_\Lambda$ , abhängig. In welcher Weise, das verdeutlicht man sich folgendermaßen: Ein Photon werde bei einer Rotverschiebung  $z_e$  ausgesandt. Für dieses reduziert sich die RW-Metrik bei radialer Ausbreitung ( $d\theta = d\varphi = 0$ ) auf  $c|dt| = R(t)|d\chi|$ . Das Differential der Zeit läßt sich umschreiben als

$$dt = \frac{dt}{dR} dR = \frac{dR}{\dot{R}} = \frac{dR}{(RH)} = \frac{dR}{dz} \frac{dz}{(RH)}.$$

Daraus kann man mit  $R = R_0/(1+z)$  den Abstand  $R_0\chi$  der Quelle von einem Beobachter bei  $z = 0$  durch

$$R_0\chi = \int_0^{z_e} \frac{c dz}{H} = \frac{c}{H_0} \int_0^{z_e} \frac{dz}{E(z)} \quad (2.31)$$

berechnen. Der Abstand ist nur von der Kosmologie und der Rotverschiebung  $z$  abhängig. Daraus läßt sich  $\chi$  und damit  $R_0 f_k(\chi)$  bestimmen.

Beispielsweise ist die Winkeldurchmesserdistanz für einen materiedominierten Kosmos ( $\Omega_r = \Omega_\Lambda = 0$ ) durch

$$D_A = \frac{2c}{H_0} \frac{\Omega z + (\Omega - 2) [\sqrt{1 + \Omega z} - 1]}{\Omega^2(1+z)}, \quad (2.32)$$

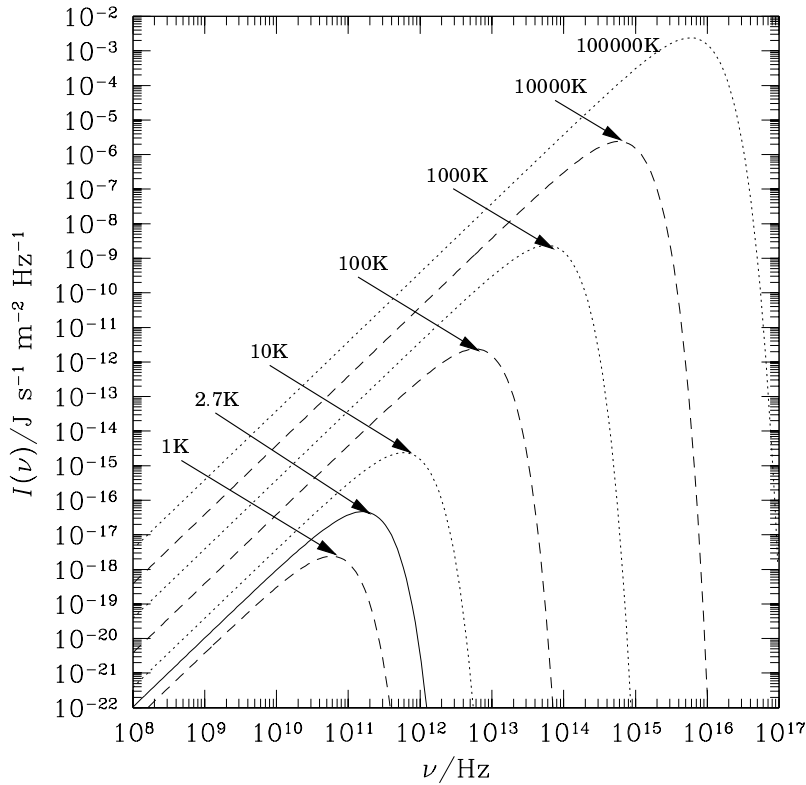
bestimmt. Aus der Kenntnis der Winkeldurchmesserdistanz ergibt sich die Möglichkeit, die Hubblekonstante in Abhängigkeit von der zugrundegelegten Kosmologie zu berechnen. [27, 24, 26]

## 2.4 Plancksches Strahlungsgesetz

Im allgemeinen ist die emittierte Strahlung eines Objektes von unterschiedlichsten Größen abhängig. Das Spektrum eines schwarzen Körpers – d.h. eines Körpers, der alle auf ihn eintreffende Strahlung unabhängig von der Frequenz absorbiert – hängt dagegen nur von dessen Temperatur ab. Die spektrale Energiedichte als Funktion der Frequenz  $\nu$  und der Temperatur  $T$  wird durch das **Plancksche Strahlungsgesetz**

$$u_\nu(T) = \frac{8\pi}{c^3} \frac{h\nu^3}{e^{\frac{h\nu}{k_B T}} - 1} \quad (2.33)$$

beschrieben. Die Ableitung dieser Gleichung gelang *Max Planck* 1900 unter Verwendung statistischer Methoden. Dabei entdeckte er – nachdem ihm die Herleitung bereits gelungen war – das Plancksche Wirkungsquantum  $h$  und die Quantisierung der Energie des Lichts.



**Abbildung 2.1:** Schwarzkörperspektrum für verschiedene Temperaturen: Der kosmische Mikrowellenhintergrund hat das Spektrum eines schwarzen Körpers mit  $T \approx 2.7\text{K}$ .

Die spektrale Intensität der Strahlung eines schwarzen Körpers ist durch

$$I_\nu = c u_\nu \quad (2.34)$$

gegeben. In Abbildung 2.1 wurde  $I_\nu$  für schwarze Körper verschiedener Temperatur  $T$  dargestellt. Man erkennt deutlich eine Verschiebung des Maximums mit steigendem  $T$  zu höheren Frequenzen. Diese wird durch das **Wiensche Verschiebungsgesetz** beschrieben:

$$\nu_{\max} = 2.821 \frac{k_B}{h} T. \quad (2.35)$$

Dieses ergibt sich aus der Lösung der transzendenten Gleichung  $e^x(3-x) = 3$  mit  $x = h\nu/k_B T$ , welche man aus der Ableitung von (2.34) nach der Frequenz erhält.

Betrachtet man nun den hoch- bzw. niederfrequenten Bereich des Spektrums eines schwarzen Körpers, so ergeben sich aus (2.34) für  $h\nu \gg k_B T$  das **Wiensche-Gesetz** und für  $h\nu \ll k_B T$  das **Rayleigh-Jeans-Gesetz**:

$$I_\nu^{\text{W}} \approx \frac{8\pi}{c^2} h\nu^3 e^{-\frac{h\nu}{k_B T}} \quad h\nu \gg k_B T \quad (2.36a)$$

$$I_\nu^{\text{RJ}} \approx \frac{8\pi}{c^2} k_B T \nu^2 \quad h\nu \ll k_B T. \quad (2.36b)$$

Diese sind schon vor der Entdeckung der Planckschen Strahlungsformel experimentell bestimmt worden und flossen direkt in die Herleitung von *Planck* ein. Im RJ-Limes ist die Intensität proportional zur Temperatur des schwarzen Strahlers.

Integration von (2.34) über alle Frequenzen führt auf das **Stefan-Boltzmann-Gesetz**

$$I = ST^4. \quad (2.37)$$

Dieses wurde erstmals 1879 von *J. Stefan* experimentell gefunden und 1884 von *L. Boltzmann* theoretisch abgeleitet. Bei der Integration über die Frequenz ist folgendes Integral zu lösen:

$$\int_0^{\infty} \frac{x^3 dx}{e^x - 1} = \frac{\pi^4}{15},$$

womit die Stefan-Boltzmann-Konstante  $S$  durch

$$S = \frac{8\pi^5 k_B^4}{15c^2 h^3}$$

festgelegt wird. Deren Wert ist in Tabelle 2.1 aufgeführt.

Der kosmische Mikrowellenhintergrund hat das Spektrum eines schwarzen Körper der Temperatur  $T \approx 2.7\text{K}$ . [28]

## 2.5 Thomsonstreuung

Die Streuung von niederenergetischen Photonen ( $h\nu \ll m_e c^2$ ) an freien, ruhenden Elektronen wird als Thomsonstreuung bezeichnet.

Der Streuprozess läßt sich klassisch folgendermaßen beschreiben: Das ruhende Elektron wird durch das Strahlungsfeld zur erzwungenen Schwingung mit der Frequenz  $\omega$  des einfallenden Lichts angeregt. Dabei ist für die anregende Kraft nur das elektrische Feld  $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 \exp(i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t))$  von Bedeutung, da die Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  auf Grund der Schwingung des Elektrons so klein gegen die Lichtgeschwindigkeit  $c$  ist, daß der Beitrag von  $\frac{e}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{B}$  zur Lorentzkraft vernachlässigt werden kann. Die Schwingung ruft ein sich zeitlich änderndes Dipolmoment hervor, was zur Abstrahlung nach der **Dipolformel**

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{\omega^4}{8\pi c^3} |\mathbf{p}_0|^2 \sin^2 \theta \quad (2.38)$$

führt. Sie beschreibt die je Raumwinkel  $d\Omega$  abgegebene Strahlungsleistung  $dP$ . Dabei sind  $\mathbf{p}_0$  die Amplitude des Dipolmomentes und  $\theta$  der Winkel zwischen Dipolmoment und Richtung von  $\mathbf{n}$  des abgestrahlten Lichts (vgl. Abb.2.2). Im geschilderten Fall schwingt das Elektron parallel zum elektrischen Feld, also in der Polarisationsebene des einfallenden Lichts. Dieses sei zunächst linear polarisiert mit dem Polarisationsvektor  $\boldsymbol{\epsilon}$  (vgl. Abschnitt 4.1). Dann gilt für die Amplitude des Dipolmomentes:

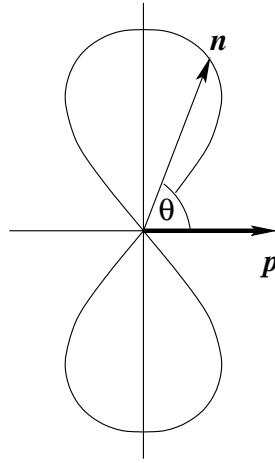
$$\mathbf{p}_0 = \frac{e^2 E_0}{m_e \omega^2} \boldsymbol{\epsilon}. \quad (2.39)$$

In diesem Fall wird die Polarisationsebene des gestreuten Lichts von  $\boldsymbol{\epsilon}$  und  $\mathbf{n}$  aufgespannt.

Folgende Gleichung verknüpft die je Raumwinkel abgestrahlte Leistung mit der einfallenden Intensität:

$$\frac{dP}{d\Omega} = \frac{d\sigma}{d\Omega} I. \quad (2.40)$$

Dabei bezeichnet  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  den **differentiellen Wirkungsquerschnitt**, welcher die Dimension einer Fläche hat und proportional zur Streuwahrscheinlichkeit in einer bestimmten



**Abbildung 2.2:** Abstrahlcharakteristik eines oszillierenden Dipols

Richtung ist. Setzt man (2.39) in (2.38) ein und vergleicht mit (2.40) unter Berücksichtigung von  $I = \frac{cE_0^2}{8\pi}$ , so erhält man:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{e^4}{m_e^2 c^4} \sin^2 \theta = \frac{3}{8\pi} \sigma_T \sin^2 \theta. \quad (2.41)$$

Hierbei ist  $\sigma_T = \frac{8\pi}{3} r_e^2$  der zur Gesamtstreuwahrscheinlichkeit proportionale **totale Wirkungsquerschnitt**, welcher aus der Integration von (2.38) über den vollen Raumwinkel folgt.  $r_e = \frac{e^2}{m_e c^2}$  ist dabei der **klassische Elektronenradius**, dessen Wert in Tabelle 2.1 angegeben ist.

Für die Streuung von unpolarisiertem Licht ist der differentielle Wirkungsquerschnitt durch

$$\left( \frac{d\sigma}{d\Omega} \right)_{\text{unpol}} = \frac{3}{16\pi} \sigma_T (1 + \sin^2 \theta). \quad (2.42)$$

gegeben. Dieser setzt sich aus einem Anteil für unpolarisierte ( $\propto \sigma_T$ ) und polarisierte ( $\propto \sigma_T \sin^2 \theta$ ) Strahlung zusammen. [29]

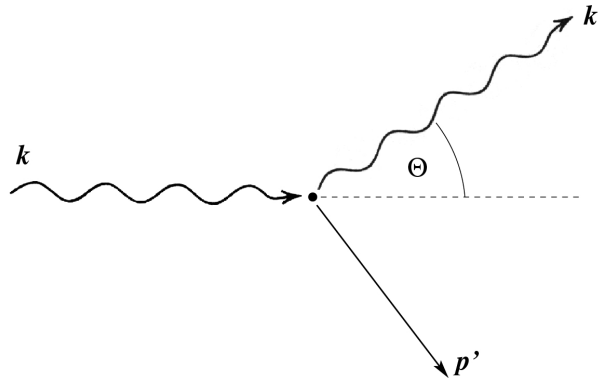
## 2.6 Comptonstreuung

Nach der Streuung von Röntgenstrahlung an ruhenden, freien Elektronen stimmt die Frequenz  $\nu'$  der gestreuten Strahlung nicht mehr mit der Frequenz  $\nu$  der einfallenden Strahlung überein. Dieser Effekt läßt sich nicht mit der klassischen Theorie der Thomsonstreuung erklären, in welcher das Elektron durch das einfallende Licht zum Schwingen mit der Frequenz  $\nu$  angeregt wird und deshalb auch wieder Licht dieser Frequenz abstrahlt.

*Arthur H. Compton* löste 1921 das Problem, indem er den Streuprozess als elastischen Stoß zwischen relativistischen Lichtteilchen – Photonen – und Elektronen beschrieb: Der Viererimpuls des ruhenden Elektrons sei vor dem Stoß durch  $p_e = (p_0, \mathbf{0})$  gegeben, der des Photons durch  $k = (k_0, \mathbf{k})$ . Nach dem Stoß habe das Elektron den Viererimpuls  $p'_e$  und das Photon  $k'$  (vgl. Abb.2.3). Die Energie- und Impulserhaltung ist in Viererschreibweise als

$$p_e + k = p'_e + k' \quad (2.43)$$

gegeben. Mit Hilfe von (2.8) läßt sich der Viererimpuls des Elektrons nach dem Stoß  $p'_e$  aus (2.43) eliminieren. Wegen Gleichung (2.9) bekommt man eine allgemeine Invariante



**Abbildung 2.3:** Geometrie der Comptonstreuung eines Photons an einem ruhenden Elektron

des Comptonstreuungsprozesses

$$p_e(k - k') = k k' . \quad (2.44)$$

Setzt man die Vierervektoren von oben ein, so erhält man mit  $p_0 = m_e c$  und  $k_0 = h\nu/c$  nach einigen Umformungen

$$\nu' = \frac{\nu}{1 + \frac{h\nu}{m_e c^2} (1 - \cos \Theta)} , \quad (2.45)$$

wobei  $\Theta$  der Winkel zwischen  $k$  und  $k'$  ist. Für Rückstreuung ( $\Theta = \pi$ ) erfährt das Photon den größten Energieverlust. Für niederenergetische Photonen ( $h\nu \ll m_e c^2$ ) geht die Comptonstreuung in Thomsonstreuung über.

An Gleichung (2.45) läßt sich ablesen, daß die Photonen bei der Streuung an ruhenden Elektronen nur Energie abgeben können. Dagegen nehmen die Photonen bei der **inversen Comptonstreuung**, welche wichtig für den thermischen Sunyaev-Zeldovich-Effekt ist, im Mittel Energie auf.

### Klein-Nishina-Wirkungsquerschnitt

Mit Hilfe der Quantenelektrodynamik kann man den differentiellen Wirkungsquerschnitt für die Comptonstreuung berechnen. Für unpolarisierte Strahlung erhält man den **Klein-Nishina Wirkungsquerschnitt**<sup>1</sup>

$$\frac{d\sigma_{\text{K-N}}}{d\Omega} = \frac{3}{16\pi} \sigma_{\text{T}} \frac{\nu'^2}{\nu^2} \left( \frac{\nu}{\nu'} + \frac{\nu'}{\nu} - \sin^2 \Theta \right) . \quad (2.46)$$

Ist die Änderung der Frequenz bei der Streuung vernachlässigbar ( $\nu'/\nu \approx 1$ ), so geht dieser in den differentiellen Thomson-Streuquerschnitt (2.42) über.

Durch Integration über den gesamten Raumwinkel  $d\Omega$  erhält man aus (2.46) den **totalen Klein-Nishina Wirkungsquerschnitt**

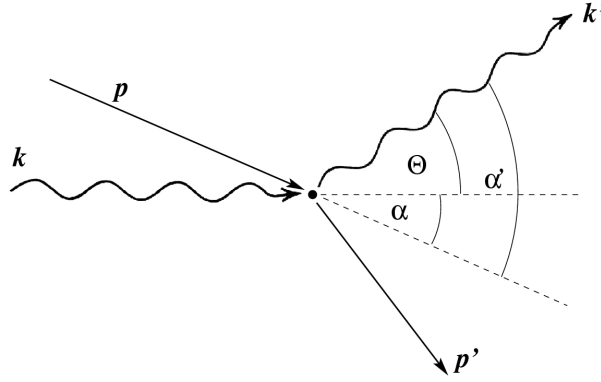
$$\sigma_{\text{K-N}} = \frac{3}{8} \sigma_{\text{T}} \frac{1}{\xi} \left[ \left\{ 1 - \frac{2(1+\xi)}{\xi^2} \right\} \ln(1+2\xi) + \frac{1}{2} + \frac{4}{\xi} - \frac{1}{2(1+2\xi)^2} \right] . \quad (2.47)$$

Dabei ist  $\xi = \frac{h\nu}{m_e c^2}$ . Gilt  $\xi \ll 1$ , so reduziert sich (2.47) auf den totalen Thomsonstreuquerschnitt:

$$\sigma_{\text{K-N}} \rightarrow \sigma_{\text{T}} \quad \text{für } \xi \rightarrow 0 . \quad (2.48)$$

Für niederenergetische Photonen ( $h\nu \ll m_e c^2$ ) kann man also den Comptonstreuungsprozess als Thomsonstreuung behandeln.

<sup>1</sup>Zur Ableitung siehe [30].



**Abbildung 2.4:** Geometrie der Comptonstreuung eines Photons an einem bewegten Elektron

### Inverse Comptonstreuung

Begrifflich bedeutet inverse Comptonstreuung, daß nicht die Photonen Energie an die Elektronen abgeben, sondern umgekehrt. Voraussetzung dafür ist, daß sich das Elektron vor dem Stoß in Bewegung befindet. In diesem Fall ist der Viererimpuls des Elektrons durch  $p_e = \gamma m_e c(1, \beta)$  gegeben. Setzt man dies in (2.44) ein, so ergibt sich

$$\nu' = \frac{\nu(1 - \beta \cos \alpha)}{1 - \beta \cos \alpha' + \frac{h\nu}{\gamma m_e c^2}(1 - \cos \Theta)}. \quad (2.49)$$

Hier sind  $\alpha$  und  $\alpha'$  die Winkel zwischen der Bewegungsrichtung des Elektrons und der Ausbreitungsrichtung des einfallenden bzw. auslaufenden Photons (vgl. Abb.2.4).

An (2.49) sieht man, daß ein niederenergetisches Photon ( $h\nu \ll \gamma m_e c^2$ ) von einem bewegten Elektron in bestimmten Fällen Energie aufnehmen kann:

$$\begin{aligned} \nu' &\stackrel{\frac{h\nu}{\gamma m_e c^2} \ll 1}{\approx} \frac{\nu(1 - \beta \cos \alpha)}{1 - \beta \cos \alpha'} \stackrel{\beta \ll 1}{\approx} \nu(1 - \beta \cos \alpha)(1 + \beta \cos \alpha') \\ &\approx \nu(1 + \beta(\cos \alpha' - \cos \alpha)). \end{aligned} \quad (2.50)$$

Für  $\cos \alpha = 0$  und  $\cos \alpha' = 1$  wird z.B. die Frequenz des gestreuten Photons und damit dessen Energie um einen Faktor  $1 + \beta$  größer.

Im Mittel über alle Einfall- und Ausfallrichtungen ergibt sich in 1. Ordnung von  $\beta$  kein Energietransfer. Erst die 2. Ordnung liefert einen Nettotransfer. Das kann man sich folgendermaßen klarmachen: Ein Elektron bewege sich im System  $K$  entlang der positiven  $x$ -Achse mit der Geschwindigkeit  $v$ . Zur Vereinfachung wird in das Ruhesystem  $K'$  des Elektrons transformiert. Die Frequenz  $\nu'$  des Photons in  $K'$  ergibt sich aus der Dopplerformel (2.13). Unter der Annahme, daß  $h\nu' \approx \gamma h\nu \ll m_e c^2$  erfüllt ist, kann die Frequenzänderung durch die Streuung vernachlässigt werden ( $\nu_{sc} \approx \nu$  nach (2.45)). Daher geht der Klein-Nishina-Wirkungsquerschnitt (2.46) in den Thomson-Streuquerschnitt (2.42) über und der Streuprozess läßt sich durch Thomsonstreuung beschreiben. Fällt unpolarisierte Strahlung auf das Elektron ein, so ist die gestreute Gesamtleistung in  $K'$  durch

$$P'_{sc} = \frac{dE'}{dt'} = \sigma_T c U'$$

gegeben (vgl. (2.40)). Diese ist eine Lorentzinvariante, da sich Energie und Zeit beide wie die Null-Komponente eines Vierervektors transformieren. Die einfallende Energiedichte

der Photonen sei im Laborsystem  $K$  durch

$$U = \int h\nu f(\nu) d\nu \quad (2.51)$$

gegeben, wobei  $f(\nu)$  die Energieverteilung der Photonen beschreibt. Es gilt allgemein

$$\frac{f(\nu)}{\nu} d\nu = \frac{f'(\nu')}{\nu'} d\nu'. \quad (2.52)$$

Diese Größe ist eine Lorentzinvariante, mit der sich die abgestrahlte Leistung im Laborsystem berechnen läßt:

$$\begin{aligned} P_{\text{sc}} &= P'_{\text{sc}} = \sigma_{\text{T}} c \int h\nu' f'(\nu') d\nu' \\ &= \sigma_{\text{T}} c \int h\nu'^2 \frac{f'(\nu')}{\nu'} d\nu' = \sigma_{\text{T}} c \int h\nu'^2 \frac{f(\nu)}{\nu} d\nu \\ &\approx \sigma_{\text{T}} c \gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2 \int h\nu f(\nu) d\nu \\ &= \sigma_{\text{T}} c \gamma^2 (1 - \beta \cos \theta)^2 U. \end{aligned} \quad (2.53)$$

Für isotrop einfallende Photonen ergibt Mittelung über alle Winkel

$$P_{\text{sc}} = \sigma_{\text{T}} c \gamma^2 \left(1 + \frac{1}{3} \beta^2\right) U.$$

Die an das Photonenfeld übertragene Leistung resultiert aus der Differenz der gestreuten Leistung  $P_{\text{sc}}$  und der einfallenden Leistung  $P_{\text{in}} = \sigma_{\text{T}} c U$ . Es ergibt sich insgesamt

$$\Delta P_{\text{Compt}} = \frac{4}{3} \sigma_{\text{T}} c \gamma^2 \beta^2 U.$$

Bei inverser Comptonstreuung wird also im Mittel Energie an das Photonenfeld in der Größenordnung von  $\beta^2$  übertragen, solange  $\gamma h\nu \ll m_e c^2$  erfüllt ist.

## Comptonisierung

Die Änderung eines Spektrums durch inverse Comptonstreuung wird als **Comptonisierung** bezeichnet. Der thermische Sunyaev-Zeldovich-Effekt ist eine Folge der Comptonisierung der kosmischen Mikrowellenhintergrundstrahlung an heißen, nichtrelativistischen Elektronen.

Um das comptonisierte Spektrum aus einem vorgegebenen Spektrum explizit zu berechnen, gibt es folgende Möglichkeit: Zunächst wird das einfallende Strahlungsfeld in das Ruhesystem  $K'$  der Elektronen transformiert. In  $K'$  läßt sich der Streuprozess durch Thomsonstreuung beschreiben, wenn die Bedingung  $\gamma h\nu \ll m_e c^2$  erfüllt ist. Im allgemeinen muß hierbei die Geschwindigkeitsverteilung der Elektronen berücksichtigt werden. Nach der Berechnung des gestreuten Spektrums in  $K'$ , erhält man das comptonisierte Spektrum durch Rücktransformation in das Laborsystem.

Bei obigem Vorgehen war wichtig, daß die Bedingung  $\gamma h\nu \ll m_e c^2$  im Ruhesystem der Elektronen erfüllt ist. Betrachtet man die Streuung von niederenergetischer Strahlung an hochrelativistischen Elektronen, so kann diese Bedingung verletzt werden. Daher muß der Streuprozess durch Comptonstreuung beschrieben werden, was auf eine quantenelektrodynamische Rechnung führt. [23, 31]



# Kapitel 3

## Der Sunyaev-Zeldovich-Effekt

Dieses Kapitel gibt zunächst einen kurzen Abriss der Grundlagen des **thermischen Sunyaev-Zeldovich-Effekts** (th-SZE), welcher durch inverse Comptonstreuung der Photonen des CMB am heißen Elektronengas in Galaxienhaufen (ICM) entsteht. Anschließend wird auf den **kinetischen Sunyaev-Zeldovich-Effekt** (k-SZE) eingegangen, der von der Pekuliarbewegung des Haufens relativ<sup>1</sup> zum CMB hervorgerufen wird. Am Ende dieses Kapitels wird eine Methode zur Bestimmung der Hubble-Konstanten mit Hilfe des Sunyaev-Zeldovich-Effekts (SZE) vorgestellt.

### 3.1 Thermischer Sunyaev-Zeldovich-Effekt

Auf der Basis von Arbeiten von *Kompaneets* [32] und *Weymann* [33] konnten *Sunyaev* und *Zeldovich* 1969 [9] eine Näherungsformel für die spektrale Abweichung der kosmischen Mikrowellenhintergrundstrahlung (CMBR) vom Schwarzkörperspektrum infolge von Comptonstreuung am heißen Elektronenmedium von Galaxienhaufen angeben.

Zur Herleitung der wichtigsten Gleichungen geht man von der Boltzmann-Gleichung für die zeitliche Evolution der Photonen-Phasenraumdicke  $n(\nu)$  durch die Streuung an einem isotropen, optisch dünnen Elektronenmedium aus:

$$\frac{\partial n(\nu)}{\partial t} = c \int d^3p \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega [f_e(\mathbf{p}')n(\nu')(1 + n(\nu)) - f_e(\mathbf{p})n(\nu)(1 + n(\nu'))]. \quad (3.1)$$

Hierin beschreibt  $f_e(\mathbf{p})$  die Verteilung der Elektronen im Phasenraum.  $\frac{d\sigma}{d\Omega}$  ist der differentielle Wirkungsquerschnitt des Streuprozesses. Man betrachtet nur Streuprozesse, welche Energie- und Impulserhaltung erfüllen ( $p + k = p' + k'$ ). Das Integral auf der rechten Seite berücksichtigt die Stöße zwischen Elektronen und Photonen. Da Photonen Bosonen sind, neigen sie im Unterschied zu Fermionen dazu, Quantenzustände zu füllen, die schon besetzt sind. Dies wird durch die Terme der Form  $1 + n$  berücksichtigt.

Die Gleichung (3.1) ist ohne einschränkende Annahmen nur für Spezialfälle lösbar. Ist die relative Frequenzänderung  $\Delta\nu/\nu$  bei der Streuung vernachlässigbar, so kann man (3.1) bis in 2. Ordnung des kleinen Parameters  $\Delta = \frac{h\Delta\nu}{k_B T_e}$  entwickeln und erhält damit eine sog. Fokker-Planck-Gleichung.  $T_e$  gibt hierbei die Temperatur der Elektronen an. *Kompaneets* führte diese Näherung 1957 für die Streuung von Photonen an einem isotropen, nichtrelativistischen, thermischen Elektronengas durch und erhielt so die **Kompaneets-Gleichung**<sup>2</sup>

$$\frac{\partial n(\nu)}{\partial y} = \frac{1}{x_e^2} \frac{\partial}{\partial x_e} \left[ x_e^4 \left( \frac{\partial n}{\partial x_e} + n + n^2 \right) \right]. \quad (3.2)$$

<sup>1</sup>relativ bedeutet eine von der Hubble-Strömung unabhängige Bewegung.

<sup>2</sup>Eine Ableitung hiervon aus (3.1) findet man in [23].

Hierin sind  $y = \int \frac{k_B T_e}{m_e c^2} \sigma_T n_e dl$  der sog. **Compton-Parameter** und  $x_e = \frac{h\nu}{k_B T_e}$ .

Die Gleichung (3.2) beschreibt die zeitliche Evolution der Photonenverteilung  $n(\nu)$  infolge der Streuung an einem isotropen, nichtrelativistischen, thermischen Elektronengas unter Berücksichtigung von induzierten Effekten. Der erste Term innerhalb der runden Klammern der rechten Seite ( $\sim \frac{\partial n}{\partial x_e}$ ) gibt die Diffusion der Photonen entlang der Frequenzachse wieder. Der zweite Term ( $\sim n$ ) beschreibt die Kühlung der Photonen durch Energieabgabe an die Elektronen (Rückstoß). Der letzte Term ( $\sim n^2$ ) folgt aus der Berücksichtigung von induzierter Streuung, welche ebenfalls zur Kühlung der Photonen beiträgt.

### Streuung der Photonen des CMB am ICM

Die Streuung der Photonen des CMB an heißen, jedoch nicht relativistischen Elektronen<sup>3</sup> in Galaxienhaufen wird durch Comptonstreuung beschrieben. Da die Photonen des CMB die Bedingung  $\gamma h\nu \ll m_e c^2$  im Schwerpunktsystem der Elektronen erfüllen, reduziert sich der Klein-Nishina-Wirkungsquerschnitt (2.46) auf den Thomson-Wirkungsquerschnitt (2.41). Unter dieser Voraussetzung ist die Kompaneets-Gleichung (3.2) zur Beschreibung der zeitlichen Entwicklung der Photonenbesetzungszahl anwendbar. Durch die Variablensubstitution  $x_e = \frac{T_0}{T_e} x$  mit  $x = \frac{h\nu}{k_B T_0}$  erhält man aus (3.2)

$$\frac{\partial n(\nu)}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^4 \left( \frac{\partial n}{\partial x} + \frac{T_0}{T_e} n + \frac{T_0}{T_e} n^2 \right) \right]. \quad (3.3)$$

Da die Temperatur der Elektronen viel größer als die der Photonen ist ( $T_0 \ll T_e$ ), braucht man für die Streuung der Photonen des CMB nur den ersten Term ( $\sim \frac{\partial n}{\partial x}$ ) zu berücksichtigen. Die Kompaneets-Gleichung vereinfacht sich dann zu

$$\frac{\partial n(\nu)}{\partial y} = \frac{1}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \left[ x^4 \frac{\partial n}{\partial x} \right]. \quad (3.4)$$

Die Störung des Spektrums erhält man nun durch Einsetzen eines ungestörten Schwarzkörperspektrums  $n_0 = 1/(e^x - 1)$  in (3.4). Nach einigen Umformungen erhält man das Ergebnis von *Sunyaev* und *Zeldovich* [9]

$$\frac{\Delta I_\nu}{I_\nu} = y \frac{x e^x}{e^x - 1} \left[ x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} - 4 \right]. \quad (3.5)$$

Diese Gleichung gibt die relative Intensitätsänderung der CMBR in Richtung eines Galaxienhaufens wieder. In Abbildung Abb.3.1 ist das gestörte Spektrum für einen Comptonparameter von  $y = 0.15$  wiedergegeben. Man erkennt deutlich eine Abnahme der Intensität im Rayleigh-Jeans-Bereich (RJ-Bereich) und eine Zunahme im Wien-Bereich. Hieran sieht man, daß die Photonen des CMB durch die Streuung am ICM entlang der Frequenzachse zu höheren Energien hin diffundieren.

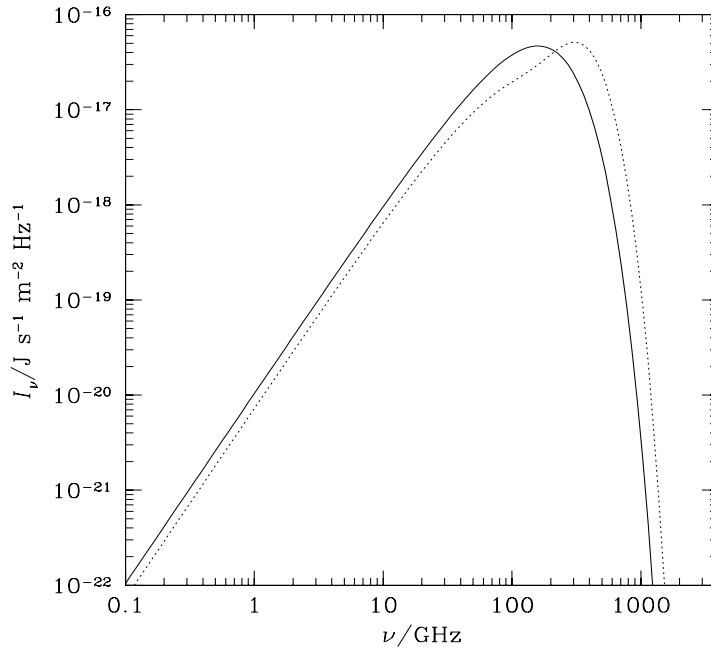
Als Näherungsformeln der relativen Intensitätsänderung im RJ- bzw. Wien-Bereich erhält man

$$\frac{\Delta I_\nu^{\text{RJ}}}{I_\nu^{\text{RJ}}} \approx \frac{\Delta T^{\text{RJ}}}{T_0} = -2y \quad x \ll 1 \quad (3.6a)$$

$$\frac{\Delta I_\nu^{\text{W}}}{I_\nu^{\text{W}}} \approx x^2 y \quad x \gg 1. \quad (3.6b)$$

Neueste Messungen zeigen, daß das Temperaturdekrement im Zentrum von Galaxienhaufen im RJ-Bereich von der Größenordnung  $\Delta T/T_0 \approx 10^{-5}$  K ist (vgl. Tab.3.3). Dieses Dekrement kann zusätzlich vom k-SZE überlagert werden. Bei Galaxienhaufen mit sehr heißem Elektronengas müssen relativistische Effekte berücksichtigt werden, die nun als nächstes besprochen werden.

<sup>3</sup>Daß diese dort vorhanden sind zeigen Röntgenbeobachtungen.



**Abbildung 3.1:** Planck-Spektrum (durchgezogen) nach der Streuung an heißen Elektronen eines Galaxienhaufens mit einem Compton-Parameter  $y = 0.15$  (gestrichelt): Am comptonisierten Spektrum erkennt man eine Abnahme der Intensität im RJ-Bereich und eine Zunahme im Wien-Bereich.

### Relativistische Korrekturen

Bei der Ableitung der Kompaneets-Gleichung wurde explizit davon ausgegangen, daß die Elektronen nichtrelativistisch waren. Bei sehr heißen Galaxienhaufen<sup>4</sup> werden relativistische Korrekturen zum th-SZE wichtig [34]. Eine quantenelektrodynamische Behandlung der Comptonstreuung von Photonen an hochenergetischen Elektronen wurde 1976 von *Buchler* und *Yueh* [35] durchgeführt. Auf Basis dieser Arbeiten untersuchten *Itoh et al.* [36] die relativistischen Korrekturen zum th-SZE. Ihre Rechnung führten sie im Schwerpunktsystem des Galaxienhaufens durch. Außerdem benutzten sie natürliche Einheiten ( $\hbar = c = 1$ ), was im folgenden beibehalten wird.

Die zeitliche Evolution der Photonen wird durch

$$\frac{\partial n(\nu)}{\partial t} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W [f_e(\mathbf{p}')n(\nu')(1 + n(\nu)) - f_e(\mathbf{p})n(\nu)(1 + n(\nu'))] \quad (3.7)$$

beschrieben [36]. Hierin ist  $W$  die Streuwahrscheinlichkeit des Compton-Prozesses, die von den Viererimpulsen der beteiligten Photonen und Elektronen abhängt. Unter Vernachlässigung von Entartungseffekten (Spin) ist die relativistische Maxwellverteilung der Elektronen durch

$$\begin{aligned} f_e(\mathbf{p}) &= f_e(E) = \frac{1}{e^{(E-\mu)/k_B T_e} + 1} \\ &\approx e^{-(E-\mu)/k_B T_e} \end{aligned}$$

gegeben. Dabei ist  $\mu$  das elektrochemische Potential, welches man mit der Phasenraum-dichte der Elektronen

$$N_e = \frac{m^3}{\pi^2} \theta_e K_2 \left( \frac{1}{\theta_e} \right) e^{\mu/k_B T_e} \quad (3.8)$$

<sup>4</sup>„Heiß“ bezieht sich auf die Temperatur der Elektronen des Haufens.

eliminieren kann. Hierin ist  $K_2(x)$  eine modifizierte Besselfunktion (vgl. Anhang A.2).  $\theta_e$  wurde als

$$\theta_e = \frac{k_B T_e}{m_e c^2}$$

definiert und dient im folgenden als Entwicklungsparameter. Unter Berücksichtigung von  $f_e(E') = e^{\Delta x_e} f_e(E)$ , mit der Definition

$$\Delta x_e = \frac{h \Delta \nu}{k_B T_e} = -\frac{\Delta E}{k_B T_e},$$

läßt sich (3.7) als

$$\frac{\partial n(\nu)}{\partial t} = \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f_e(E) [n(\nu')(1 + n(\nu)e^{\Delta x_e} - n(\nu)(1 + n(\nu')))] \quad (3.9)$$

schreiben. Diese Gleichung kann man noch weiter vereinfachen, wenn man von  $\Delta x_e \ll 1$  ausgeht. Mit den Taylor-Entwicklungen von  $n(\nu')$  und  $e^{\Delta x_e}$  ergibt sich

$$\frac{\partial n(\nu)}{\partial t} = \sum_{k=1}^{\infty} \left[ \underbrace{\frac{1}{k!} \int \frac{d^3 p}{(2\pi)^3} d^3 p' d^3 k' W f_e(E)}_{=: I_k} \cdot \Delta x_e^k \cdot \left\{ n \cdot \frac{\partial^k n}{\partial x_e^k} - [1 + n] \cdot \left(1 + \frac{\partial}{\partial x_e}\right)^k n \right\} \right] \quad (3.10)$$

Dies entspricht den Angaben von *Itoh et al.* [36] in kompakter Form.

Die weitere Aufgabe besteht nun darin, die Integrale  $I_k$  zu lösen. Dies ist durch Reihenentwicklung des Integranden nach dem kleinen Parameter  $\theta_e$  möglich. Die Lösungen der Integrale  $I_k$  wurden von *Itoh et al.* [36] mit Hilfe von Computer-Algebra-Programmen bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\theta^4)$  und  $k = 10$  durchgeführt.<sup>5</sup> Hier sollen nur die relativistischen Korrekturen bis zur Ordnung  $\mathcal{O}(\theta^2)$  präsentiert werden. Die relative Intensitätsänderung der CMBR in Richtung eines Galaxienhaufens erhält man durch Einsetzen eines ungestörten Schwarzkörperspektrums in (3.10) als

$$\frac{\Delta I_\nu}{I_\nu} = y \frac{x e^x}{e^x - 1} [Y_0 + Y_1 \theta_e + Y_2 \theta_e^2 + \mathcal{O}(\theta^3)] . \quad (3.11)$$

Die  $Y_n$  sind durch folgende Ausdrücke bestimmt

$$Y_0 = -4 + \tilde{C} \quad (3.12a)$$

$$Y_1 = -10 + \frac{47}{2} \tilde{C} - \frac{42}{5} \tilde{C}^2 + \frac{7}{10} \tilde{C}^3 - \tilde{S}^2 \left[ \frac{21}{5} - \frac{7}{5} \tilde{C} \right] \quad (3.12b)$$

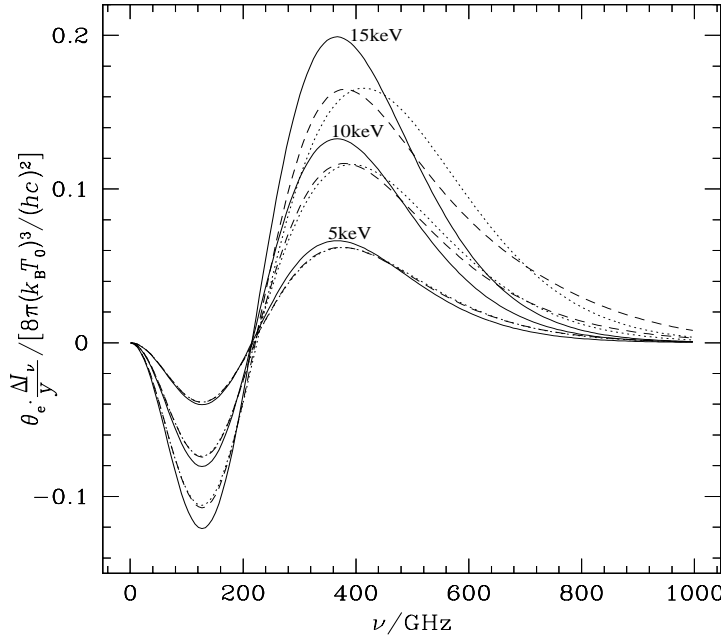
$$Y_2 = -\frac{15}{2} + \frac{1023}{8} \tilde{C} - \frac{868}{5} \tilde{C}^2 + \frac{329}{5} \tilde{C}^3 - \frac{44}{5} \tilde{C}^4 + \frac{11}{30} \tilde{C}^5 \\ - \tilde{S}^2 \left[ \frac{434}{5} - \frac{658}{5} \tilde{C} + \frac{242}{5} \tilde{C}^2 - \frac{143}{30} \tilde{C}^3 \right] - \tilde{S}^4 \left[ \frac{44}{5} - \frac{187}{60} \tilde{C} \right] \quad (3.12c)$$

$$\tilde{C} = x \frac{e^x + 1}{e^x - 1} \stackrel{!}{=} x \coth\left(\frac{x}{2}\right) \quad (3.12d)$$

$$\tilde{S} = \frac{x}{\sinh\left(\frac{x}{2}\right)} \quad (3.12e)$$

Die nullte Ordnung entspricht dem Ergebnis nach der Kompaneets-Gleichung.

<sup>5</sup>Die seitenlangen Ergebnisse der Entwicklung sind in der Arbeit von *Itoh et al.* [36] zu finden.



**Abbildung 3.2:** Die Intensitätsänderung  $\Delta I_\nu$  für  $k_B T_e = 5, 10, 15$  keV: Die durchgezogenen Linien geben jeweils das Ergebnis von *Sunyaev* und *Zeldovich* [9] wieder. Die übrigen Kurven wurden unter Berücksichtigung der relativistischen Korrekturen bis 1. Ordnung (gepunktet) bzw. 2. Ordnung (gestrichelt) in  $\theta_e$  berechnet.

In Abbildung Abb.3.2 ist die Intensitätsänderung  $\Delta I_\nu$  als Funktion der Frequenz aufgetragen. Man erkennt deutlich, daß im RJ-Bereich die Intensitätsänderung unter Berücksichtigung der relativistischen Korrekturen etwas kleiner ist als es aus der Kompaneets-Gleichung folgt. Die Kurven 1. und 2. Ordnung unterscheiden sich nicht wesentlich voneinander. Als Näherungsformel für den RJ-Bereich erhält man aus (3.11)

$$\frac{\Delta I_\nu^{\text{RJ}}}{I_\nu^{\text{RJ}}} \approx \frac{\Delta T^{\text{RJ}}}{T_0} = -2y \left[ 1 - \frac{17}{10}\theta_e + \frac{123}{40}\theta_e^2 + \mathcal{O}(\theta_e^3) \right]. \quad (3.13)$$

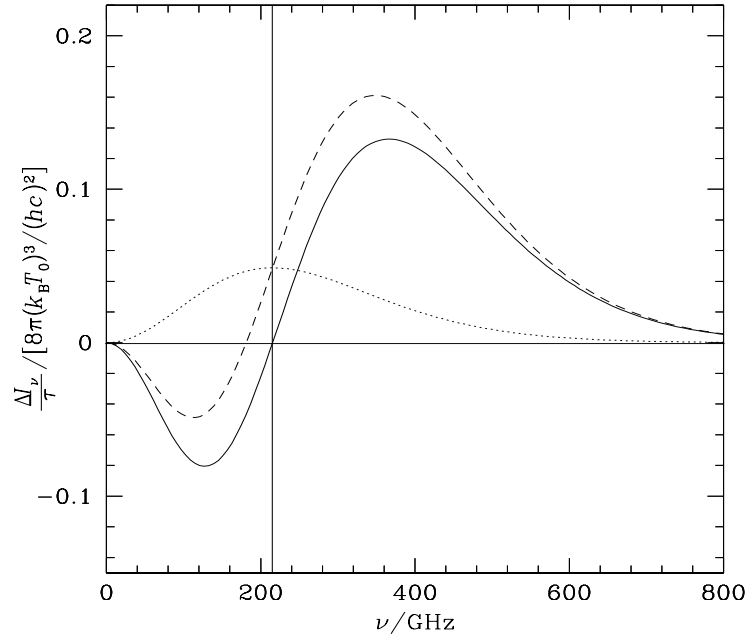
Für eine Bestimmung der Hubble-Konstanten mit Hilfe des th-SZE (Abschnitt 3.3) sind relativistische Korrekturen von großer Bedeutung: *Molnar* und *Birkinshaw* [37] schätzten den Fehler, der bei Vernachlässigung der relativistischen Korrekturen entsteht, auf ca. 10% für den Wert der Hubble-Konstanten. Die Beziehung (3.13) gibt die Korrekturen im RJ-Bereich für  $k_B T_e \leq 50$  keV sehr gut wieder [36].

Im Wien-Bereich erkennt man eine deutliche Verschiebung des Maximums des Intensitätsinkrements. Die Abhängigkeit von der Ordnung der betrachteten Korrekturen ist hier sehr groß. Da es bisher keine analytische Lösung des Kollisions-Integrals (3.9) gibt, muß man für sehr heiße Galaxienhaufen in diesem Bereich auf numerische Methoden zurückgreifen.

Weiterhin erkennt man eine leichte Abhängigkeit der Nullstelle der Intensitätsänderung von der Temperatur der Elektronen. *Itoh et al.* [36] gaben hierfür die Näherungsformel

$$x_0 \approx 3.830 \left[ 1 + 1.1674\theta_e - 0.8533\theta_e^2 \right] \quad (3.14)$$

an. Wie im nächsten Abschnitt erläutert wird, ist es bei der **Crossover-Frequenz**  $x_0$  möglich, den th-SZE vom k-SZE zu trennen. Daher ist die Beziehung (3.14) für eine genaue Bestimmung der Hubble-Konstanten ebenfalls von großer Bedeutung.



**Abbildung 3.3:** Intensitätsänderung durch den th-SZE für eine Temperatur von  $k_B T_e = 10$  keV (durchgezogen), den k-SZE für  $\beta_{\parallel} = 0.01$  (gepunktet) und die Überlagerung beider Effekte (gestrichelt). In der Nähe der Crossover-Frequenz  $\nu_c \approx 217$  GHz hat der k-SZE sein Maximum. Hier lassen sich beide Effekte voneinander trennen.

### 3.2 Kinetischer Sunyaev-Zeldovich-Effekt

Bei den vorherigen Betrachtungen wurde eine globale Bewegung des Galaxienhaufens relativ zum CMB nicht berücksichtigt. Wie *Sunyaev* und *Zeldovich* 1980 [10] zeigten, ist die spektrale Störung des CMB durch Streuung an Elektronen in Galaxienhaufen, welcher sich relativ zum CMB mit einer Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegt, durch

$$\frac{\Delta I_{\nu}}{I_{\nu}} = -\tau \beta_{\parallel} \frac{x e^x}{e^x - 1} \quad (3.15)$$

gegeben.<sup>6</sup> Hierin ist  $\tau = \int \sigma_T n_e dl$  die optische Tiefe und  $\beta_{\parallel}$  die auf  $c$  normierte, zur Sichtlinie parallele Geschwindigkeitskomponente von  $\mathbf{v}$ . Die positive Geschwindigkeitsrichtung wurde vom Beobachter weg definiert.

Mit der RJ-Näherung kann man aus (3.15) die relative Temperaturänderung berechnen und erhält

$$\frac{\Delta T}{T_0} = -\tau \beta_{\parallel}. \quad (3.16)$$

Bewegt sich der Galaxienhaufen auf den Beobachter zu, so nimmt die Effektivtemperatur im RJ-Bereich zu.

Für eine genaue Bestimmung der Hubble-Konstanten mit Hilfe des th-SZE ist die Größe des Temperaturdekrementes im RJ-Bereich wichtig. Dieses wird durch einen überlagerten k-SZE verändert. In Abbildung 3.3 ist die Intensitätsänderung durch den k-SZE nach Gleichung (3.15) für ein typisches  $\beta_{\parallel}$  von 0.01 dargestellt. Zusätzlich ist noch die Intensitätsänderung auf Grund des th-SZE nach Gleichung (3.5) aufgetragen. Wie man sieht, ist der k-SZE dort am größten, wo der th-SZE seine Nullstelle hat. Mißt man

<sup>6</sup>Hier werden nur die wichtigsten Formeln zusammengestellt. Eine Herleitung und Diskussion findet man in Kapitel 5.

in der Nähe der Crossover-Frequenz (Gleichung (3.14)), so lassen sich die Beiträge des th-SZE und des k-SZE zur relativen Intensitätsänderung voneinander trennen.

Eine weitere Folge der globalen Bewegung des Galaxienhaufens ist die Entstehung von linearer Polarisation der CMBR durch die Streuung. *Sunyaev* und *Zeldovich* [10] gaben als Ergebnis für die Größe des Polarisationsgrads im RJ-Bereich

$$P^{\text{RJ}}(\alpha) = \frac{1}{10} \beta_{\perp}^2 \tau \quad (3.17)$$

an. Hierin ist  $\beta_{\perp}$  die auf  $c$  normierte Komponente der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  in der Himmelsebene. Die Polarisationssebene steht senkrecht auf der Richtung von  $\beta_{\perp}$ . Eine radiale Bewegung des Galaxienhaufens erzeugt keine Polarisation.

### 3.3 Bestimmung der Hubble-Konstanten

Eine wichtige Anwendung des th-SZE ist die von Standardkerzen unabhängige Messung der Hubblekonstanten  $H_0$  durch Kombination von SZ- mit Röntgendaten. Dies soll hier kurz erläutert werden: Die monochromatische Röntgen-Flächenhelligkeit  $S^{\text{X}}$  eines Galaxienhaufens wird durch Bremsstrahlung der Elektronen im Haufen erzeugt. Die spektrale Emissivität von thermischer Bremsstrahlung hängt mit der Dichte der Elektronen  $n_e$  und der der Plasma-Atomkerne  $n_{\text{I}}$ , sowie der Elektronen-Temperatur  $T_e$  folgendermaßen zusammen (vgl. [23]):

$$\epsilon_{\nu}^{\text{ff}} = 6.8 \cdot 10^{-34} Z^2 n_e n_{\text{I}} \frac{e^{-\frac{h\nu}{k_{\text{B}} T_e}}}{\sqrt{T_e}} \langle g_{\text{ff}}(\nu, T_e) \rangle_{\nu}. \quad (3.18)$$

Dabei ist  $Z$  die Kernladungszahl und  $g_{\text{ff}}$  der sogenannte **Gaunt-Faktor**, welcher von dem jeweils betrachteten Wellenlängenbereich abhängt und tabelliert vorliegt. Die spitzen Klammern symbolisieren Mittelung über die Geschwindigkeitsverteilung.

Nimmt man an, daß die Dichte der Atomrümpfe bis auf einen Vorfaktor mit der Elektronendichte übereinstimmt, so kann man für die monochromatische Röntgen-Flächenhelligkeit

$$S^{\text{X}} = \frac{1}{4\pi(1+z)^4} \int n_e^2 \Lambda_e(\nu, T_e) dl \quad (3.19)$$

schreiben. Der Faktor  $(1+z)^{-4}$  ergibt sich aus dem kosmologischen Transformationsverhalten der spektralen Emissivität. Wichtig ist hier die quadratische Abhängigkeit von der Elektronendichte  $n_e$ . Alle anderen Abhängigkeiten wurden in  $\Lambda_e$  zusammengefaßt.

Das Temperaturdekrement auf Grund des th-SZE erhält man aus Gleichung (3.13)

$$\Delta T^{\text{RJ}} = -2\sigma_{\text{T}} T_0 \frac{k_{\text{B}}}{m_e c^2} g(\theta_e) \int n_e T_e dl, \quad (3.20)$$

mit  $g(\theta_e) = 1 - \frac{17}{10}\theta_e + \frac{123}{10}\theta_e^2$ . Im Gegensatz zur Röntgen-Flächenhelligkeit hängt das Temperaturdekrement linear von der Elektronendichte ab. Diese unterschiedliche Abhängigkeit macht eine Bestimmung der Hubble-Konstante mit Hilfe des th-SZE möglich.

Die Größen  $n_e, T_e, \Lambda_e$  sind vom Ort  $\mathbf{r}$  im Galaxienhaufen abhängig. Wählt man Zylinderkoordinaten mit der  $z$ -Achse entlang der Sichtlinie, so kann man diese als

$$n_e(\mathbf{r}) = n_{e0} f_e(\theta, \phi, l) \quad (3.21a)$$

$$T_e(\mathbf{r}) = T_{e0} f_T(\theta, \phi, l) \quad (3.21b)$$

$$\Lambda_e(\mathbf{r}) = \Lambda_{e0} f_{\Lambda}(\theta, \phi, l) \quad (3.21c)$$

schreiben. Die dimensionslosen Formfaktoren  $f_i$  enthalten die Ortsabhängigkeiten. Dabei ist  $\theta$  der Abstand zur Sichtlinie in Bogenmaß,  $\phi$  der Azimutwinkel und  $l$  die  $z$ -Koordinate. Geht man von einem sphärischen Galaxienhaufen aus, so kann man  $l = D_{\text{A}} \xi$

schreiben, wobei  $D_A$  die Winkeldurchmesserdistanz ist (vgl. (2.30)), welche von der Hubble-Konstanten  $H_0$  und der gewählten Kosmologie abhängt. Mit den Definitionen (3.21) lassen sich die Gleichungen (3.19) und (3.20) folgendermaßen schreiben

$$S^X(\theta, \phi) = N^X \int f_e^2 f_\Lambda d\xi \quad (3.22a)$$

$$\Delta T^{\text{RJ}}(\theta, \phi) = -N^{\text{RJ}} \int f_e f_T d\xi. \quad (3.22b)$$

Die Normierungskonstanten sind dabei durch

$$N^X = \frac{D_A}{4\pi(1+z)^4} \Lambda_{e0} n_{e0}^2 \quad (3.23a)$$

$$N^{\text{RJ}} = 2T_0 \sigma_T n_{e0} \theta_e g(\theta_e) D_A \quad (3.23b)$$

gegeben. Diese können durch Anpassung an die Meßdaten festgelegt werden. Dazu muß man allerdings ein Modell für die Formfaktoren  $f_i$  vorgeben, worauf wir weiter unten eingehen werden. Aus dem Verhältnis  $(N^{\text{RJ}})^2/N^X$  kann man die Winkeldurchmesserdistanz nach

$$D_A = \left( \frac{(N^{\text{RJ}})^2}{N^X} \right) \frac{\Lambda_{e0}}{16\pi T_0^2 \sigma_T^2 (\theta_e g(\theta_e))^2 (1+z)^3} \quad (3.24)$$

berechnen. Wie in Abschnitt 2.3 erläutert, kann man aus (3.24) den Wert der Hubble-Konstanten berechnen, wenn man die Kosmologie, das bedeutet die Werte von  $\Omega_m, \Omega_r, \Omega_R$  und  $\Omega_\Lambda$ , festlegt.

### Isothermes $\beta$ -Modell

Um die Normierungskonstanten (3.23a) zu bestimmen, müssen die Formfaktoren  $f_i$  festgelegt werden. Hierfür benutzt man ein sogenanntes **isothermes  $\beta$ -Modell** nach *Cavaliere et al.* [38], wobei dabei folgende Vereinfachungen gemacht werden:

- Die Temperatur im Galaxienhaufen ist konstant  $\rightarrow T_e(\mathbf{r}) = T_{e0} \rightarrow f_T = f_\Lambda = 1$ .
- Der Galaxienhaufen hat eine annähernd sphärische Struktur. Man kann das Dichteprofil als Funktion des Abstandes vom Zentrum schreiben  $\rightarrow n_e(\mathbf{r}) = n_e(r)$ .
- Die Gas-Verteilung wird durch ein  $\beta$ -Modell<sup>7</sup> wiedergegeben

$$n_e(r) = n_{e0} \left( 1 + \frac{r^2}{r_c^2} \right)^{-\frac{3\beta}{2}}. \quad (3.25)$$

Dabei ist  $r_c$  ein typischer Kernradius, der dadurch festgelegt wird, daß für  $r = r_c$  und  $\beta = 2/3$  die Dichte auf die Hälfte des zentralen Wertes abgefallen ist. Für  $f_e$  folgt dann

$$f_e(\theta, \xi) = \left( 1 + \frac{\theta^2 + \xi^2}{\theta_c^2} \right)^{-\frac{3\beta}{2}}. \quad (3.26)$$

Mit  $f_e$  nach Gleichung (3.26) und  $f_T = f_\Lambda = 1$  lassen sich die Integrale (3.22) berechnen, wenn man davon ausgeht, daß das Elektronenmedium in  $\xi$ -Richtung infinit ist. Damit die

<sup>7</sup> $\beta$  hat hier nichts mit der auf  $c$  normierten Geschwindigkeit zu tun, sondern ist ein Modellparameter. Typische Galaxienhaufen haben ein  $\beta$  von  $\frac{2}{3}$  [34].



Name	$H_0$ [kms <sup>-1</sup> Mpc <sup>-1</sup> ]	$\Delta T$ [ $\mu$ K]	$z$	Referenz
CL0016+16	$84_{-19}^{+25}$	$-1077 \pm 110$	0.546	Grainge et al. 2001
CL0016+16	$63_{-9}^{+12}$	$-1242 \pm 105$	0.5455	Reese et al. 2000
Abell 1995	$52.2_{-29.6}^{+29.9}$	$-1101 \pm 53$	0.322	Patel et al. 2000
Abell 1835	$66_{-15}^{+21}$	–	0.2523	Mauskopf et al. 2000
Abell 2163	$60_{-23}^{+40}$	–	0.201	Holzapfel et al. 1997

**Tabelle 3.1:** Werte für die mit Hilfe des SZE bestimmte Hubble-Konstante  $H_0$  für ein flaches Universum mit kosmologischer Konstanten ( $\Omega_m = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$ ): Angegeben sind außerdem das zentrale Temperaturdekrement  $\Delta T$  und die Rotverschiebung  $z$  des betrachteten Galaxienhaufens.

Gesamtmasse der Elektronen des Galaxienhaufens nicht divergiert, muß  $f_e$  in  $\theta$  räumlich beschränkt sein. Aus obigen Vereinfachungen erhält man somit

$$I^{(1)}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_e d\xi = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\frac{3}{2}\beta - \frac{1}{2})}{\Gamma(\frac{3}{2}\beta)} \theta_c \left(1 + \frac{\theta^2}{\theta_c^2}\right)^{\frac{1-3\beta}{2}} \quad (3.27)$$

$$I^{(2)}(\theta) = \int_{-\infty}^{\infty} f_e^2 d\xi = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(3\beta - \frac{1}{2})}{\Gamma(3\beta)} \theta_c \left(1 + \frac{\theta^2}{\theta_c^2}\right)^{\frac{1-6\beta}{2}}. \quad (3.28)$$

Die  $\Gamma$ -Funktion ist im Anhang A.1 erläutert.

Das oben beschriebene Modell kann nun an die Meßdaten angepaßt werden. Dabei ist klar, daß die Parameter  $\beta$  und  $\theta_c$  sowohl für die SZ-Daten als auch für die Röntgendaten gleich sein müssen. Die Temperatur der CMBR ergibt sich aus Messungen des ungestörten Schwarzkörperspektrums ( $T_0 = 2.728 \pm 0.004$  K [6]). Die Werte für  $T_{e0}$  und  $\Lambda_{e0}$  erhält man aus Messungen des Röntgen-Spektrums (Bremsstrahlung). Die Rotverschiebung  $z$  ergibt sich durch Messung an einzelnen Galaxien des Haufens.

Heute erreicht man mit der oben geschilderten Methode schon die Genauigkeit anderer Methoden zur Bestimmung von  $H_0$ . In letzter Zeit sind viele Gruppen damit beschäftigt, durch Beobachtungen des th-SZE an verschiedenen Galaxienhaufen den Wert der Hubble-Konstanten festzulegen [39, 40, 34, 41]. Für ein flaches Universum mit kosmologischer Konstante ( $\Omega_m = 0.3, \Omega_\Lambda = 0.7$ ) sind die Ergebnisse verschiedener Gruppen in Tabelle 3.3 zusammengestellt. Die Abweichung zwischen den verschiedenen Resultaten hat unterschiedliche Ursachen, die von Patel et al. [40] ausführlich diskutiert werden. Hier seien nur die wesentlichen Fehlerquellen aufgelistet:

- Schlechte Kalibration der SZ- und Röntgenmessungen: Diese Fehler lassen sich bei zukünftigen Missionen verringern.
- Asphäritäten des betrachteten Galaxienhaufens: Mit großen Stichproben von Haufenbeobachtungen läßt sich der Einfluß minimieren.
- Unaufgelöste Radioquellen: Diese können das SZ-Signal verfälschen. Der Fehler ist am größten, wenn sich die Radioquelle im Zentrum des Galaxienhaufens befindet.
- Abweichungen von der Isothermalität: Temperaturgradienten werden in dem Modell nicht berücksichtigt. Alternativ kann man ein polytropes Temperaturmodell verwenden [42].
- Kinetischer Sunyaev-Zeldovich Effekt: Die Entkopplung von k-SZE und th-SZE ist über Messungen bei der Crossover-Frequenz möglich (vgl. Abschnitt 3.2).

*Y.Rephaeli* merkte 1995 an, daß auch die Bewegung einzelner Galaxien im Haufen einen kinetischen Effekt in der Größenordnung von  $\frac{\Delta T^{\text{RJ}}}{T_0} \approx 3 \cdot 10^{-5}$  bewirken könnte [11]. Schließt man Strömungen des ICM nicht von vornherein aus, so könnte dies daher einen weiteren zu berücksichtigenden Einfluß auf die Bestimmung der Hubble-Konstanten mit Hilfe des th-SZE haben.

# Kapitel 4

## Streuung polarisierter Strahlung

In diesem Kapitel werden die Stokesparameter vorgestellt, mit deren Hilfe man in der Astrophysik teilweise polarisierte Strahlung beschreibt. Im weiteren wird auf die Streuung polarisierter Strahlung eingegangen, was als Vorbereitung für die Beschreibung der Streuung von Photonen des CMB an den Elektronen von Galaxienhaufen in Kapitel 5 dient.

### 4.1 Polarisation

Licht ist eine sich zeitlich im Raum ausbreitende elektromagnetische Schwingung. Im Vakuum wird dieses durch die Maxwell-Gleichungen beschrieben:

$$\begin{aligned}\nabla \cdot \mathbf{E} &= 0 & \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0 & \nabla \times \mathbf{B} &= \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}.\end{aligned}\tag{4.1}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man Lösungen für die Feldstärkevektoren  $\mathbf{E}$  und  $\mathbf{B}$ , die aufeinander senkrecht stehen, mit einer Frequenz  $\omega$  periodisch schwingen und sich als transversale Wellen im Raum mit Lichtgeschwindigkeit  $c$  in Richtung des Wellenvektors  $\mathbf{k} = \frac{\omega}{c} \mathbf{n}$  ausbreiten.  $\mathbf{n}$  ist dabei der Einheitsvektor in Ausbreitungsrichtung der Welle.

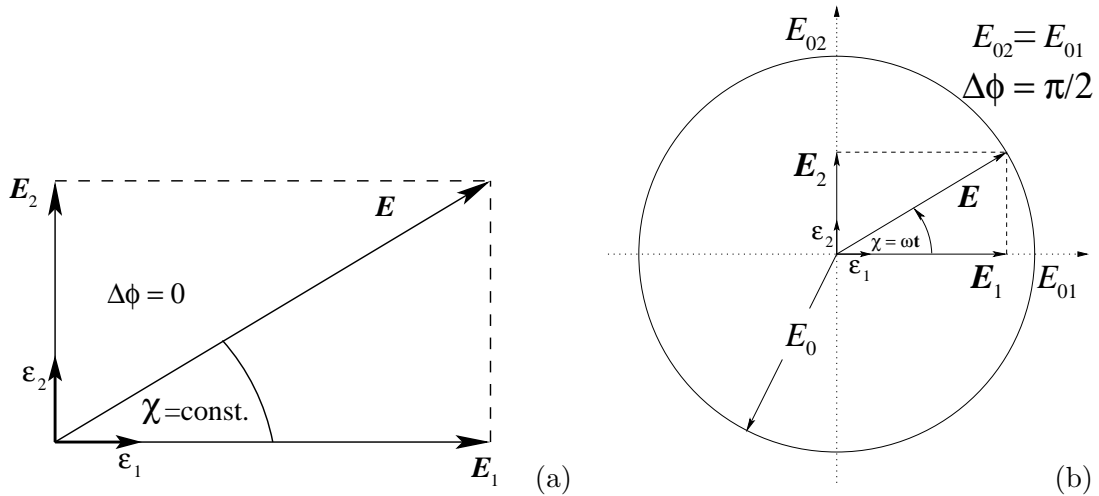
Mit der Lösung für  $\mathbf{E}$  ist auch die Lösung von  $\mathbf{B}$  bestimmt. Ohne weitere Randbedingungen sind jedoch noch nicht alle Freiheitsgrade der Welle festgelegt. Eine Lösung für  $\mathbf{E}$  hat die Form

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}, t) = \mathbf{E}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t)}.\tag{4.2}$$

Die räumliche und zeitliche Änderung entlang der Ausbreitungsrichtung wird durch den Realteil der Exponentialfunktion wiedergegeben. Zusätzlich kann sich aber noch die Schwingungsebene, welche durch den Vektor  $\mathbf{E}_0$  festgelegt wird, räumlich und zeitlich ändern. Es erweist sich als sinnvoll in der Ebene von  $\mathbf{E}_0$  und  $\mathbf{B}_0$  die aufeinander senkrecht stehenden, konstanten Einheitsvektoren  $\boldsymbol{\epsilon}_1$  und  $\boldsymbol{\epsilon}_2$  einzuführen. Damit kann man die Welle bezüglich dieser Vektoren in zwei Teilwellen  $\mathbf{E}_1$  und  $\mathbf{E}_2$  zerlegen, deren Superposition wieder  $\mathbf{E}$  ergibt

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1(\mathbf{r}, t) &= \boldsymbol{\epsilon}_1 E_{01} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_1)} \\ \mathbf{E}_2(\mathbf{r}, t) &= \boldsymbol{\epsilon}_2 E_{02} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega t + \phi_2)}.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Es wurde hier schon eine mögliche, zeitlich feste Phasenverschiebung  $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$  zwischen den Maxima von  $\mathbf{E}_1$  und  $\mathbf{E}_2$  zugelassen.



**Abbildung 4.1:** Die Zusammensetzung des Feldstärkevektors  $\mathbf{E}$ :

(a) linear polarisiertes Licht:  $\mathbf{E}_1$  und  $\mathbf{E}_2$  müssen hier exakt gleichphasig (wie dargestellt) oder gegenphasig schwingen.

(b) zirkular polarisiertes Licht: Neben einer Phasenverschiebung  $\Delta\phi$  von  $\pm\frac{\pi}{2}$  muß noch  $E_{01} = E_{02}$  gelten (hier:  $\Delta\phi = +\frac{\pi}{2}$  für eine linksdrehende Welle). Gilt nur  $\Delta\phi \neq \pm\frac{\pi}{2}$ , so ergibt sich im allgemeinen eine Ellipse, deren Hauptachsen gegenüber der Polarisationsbasis gedreht sind (vgl. Abb.4.2).

## Lineare Polarisation

Ist der Vektor  $\mathbf{E}_0$  zeitlich konstant, so hat man es mit **linear polarisiertem Licht** zu tun. Hierfür muß  $\Delta\phi = 0, \pi$  gelten. Fällt auf einen Detektor mit vorgeschaltetem linearen Polarisationsfilter vollständig linear polarisiertes Licht ein, so mißt man unter einem Winkel von

$$\chi = \arctan \frac{|\mathbf{E}_2|}{|\mathbf{E}_1|} \quad (4.4)$$

zu  $\epsilon_1$  maximale, bei  $\chi + \frac{\pi}{2}$  keine Intensität (vgl. Abb.4.1).

## Elliptische Polarisation

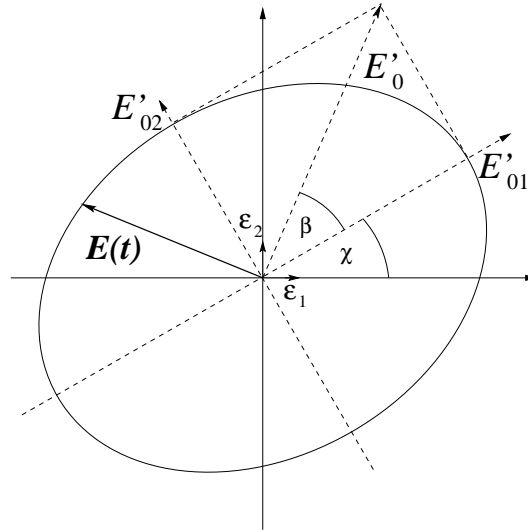
Gilt  $\Delta\phi \neq 0, \pi$ , so spricht man allgemein von **elliptisch polarisiertem Licht**. Die Lage der Hauptachsen hängt dabei von der Phasenverschiebung und dem Verhältnis der Amplituden  $E_{01}$  und  $E_{02}$  ab. Für positives  $\Delta\phi$  dreht sich der Feldstärkevektor links, für negatives rechts herum. Ist  $\Delta\phi = \pm\frac{\pi}{2}$ , so liegen die Hauptachsen parallel zu  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$ . Wenn zusätzlich noch  $E_{01} = E_{02}$  gilt, so hat man es mit **zirkular polarisiertem Licht** zu tun (vgl. Abb.4.1). [29]

## 4.2 Stokesparameter

Die Eigenschaften von polarisiertem Licht kann man in einfacher Weise mit Hilfe der von *Sir George Stokes* 1852 eingeführten Parameter  $I, Q, U, V$  erfassen. Zur Ableitung der Parameter beschreibt man die Polarisationsellipse bezüglich ihrer Hauptachsen durch

$$\begin{aligned} E'_1 &= E'_0 \cos \beta \cos \omega t \\ E'_2 &= -E'_0 \sin \beta \sin \omega t. \end{aligned} \quad (4.5)$$

In Abbildung 4.2 sind die Verhältnisse gezeigt. Nun transformiert man (4.5) in die durch  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  definierte Polarisationsbasis und vergleicht mit der Beschreibung (4.3).



**Abbildung 4.2:** Veranschaulichung allgemeiner elliptischer Polarisation: Die Länge der Halbachsen kann mit Hilfe von  $E'_0$  und  $\beta$  ausgedrückt werden. Der feste Winkel  $\chi$  gibt die Lage der Hauptachsen zu dem durch  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  definierten Koordinatensystem an.

Dadurch erhält man ein Gleichungssystem, dessen Lösung durch die Parameter

$$I = E_{01}^2 + E_{02}^2 = E_0'^2 \stackrel{!}{=} E_0^2 \quad (4.6a)$$

$$Q = E_{01}^2 - E_{02}^2 = E_0'^2 \cos 2\beta \cos 2\chi \quad (4.6b)$$

$$U = 2E_{01}E_{02} \cos \Delta\phi = E_0'^2 \cos 2\beta \sin 2\chi \quad (4.6c)$$

$$V = -2E_{01}E_{02} \sin \Delta\phi = E_0'^2 \sin 2\beta \quad (4.6d)$$

gegeben wird. Die Gleichungen (4.6) sind die Definitionen der **Stokesparameter**. Der Winkel  $\chi$  beschreibt die Orientierung der Halbachsen zum durch  $\epsilon_1$  und  $\epsilon_2$  definierten Koordinatensystem.  $\beta$  bestimmt das Verhältnis der Halbachsen der Ellipse (vgl. Abb.4.2). Ist  $\beta = 0, \pm\frac{\pi}{2}$ , so entartet die Ellipse zu einer Geraden, was linearer Polarisation entspricht ( $V = 0$ ). Hat  $\beta$  die Werte  $\pm\frac{\pi}{4}$ , so sind die Halbachsen identisch, und es macht keinen Sinn mehr den Winkel  $\chi$  zu betrachten. Man erhält eine zirkular polarisierte Welle ( $Q = U = 0$ ). Allgemein hat die Welle für  $0 < \beta < \frac{\pi}{2}$  positive ( $V > 0$ , rechtsdrehend), für  $-\frac{\pi}{2} < \beta < 0$  negative ( $V < 0$ , linksdrehend) Helizität.

In anderer Form kann man die Stokesparameter, wie an deren Definition (4.6) deutlich wird, auch folgendermaßen schreiben

$$E_0 = \sqrt{I} \quad (4.7a)$$

$$\tan 2\chi = \frac{U}{Q} \quad (4.7b)$$

$$\sin 2\beta = \frac{V}{I}. \quad (4.7c)$$

Mit  $I, Q, U, V$  sind die drei Größen  $E_0, \beta, \chi$  bestimmt, und damit die Polarisation des Lichts vollständig charakterisiert. Tatsächlich ist das Problem sogar überbestimmt, wenn es sich um 100% polarisiertes Licht handelt, denn dann gilt  $I^2 = Q^2 + U^2 + V^2$ , womit man einen der Parameter eliminieren kann.

## Quasi-monochromatische Wellen

In Gleichung (4.3) wurde eine monochromatische Zerlegung des Lichts angesetzt. In der Praxis betrachtet man immer ein Gemisch von vielen einzelnen Wellen, die fast identische Frequenz haben. Man spricht dann von **quasi-monochromatischen Wellen**, deren Frequenzen nur wenig von der Grundfrequenz  $\omega$  abweichen. Die Superposition von diesen einzelnen Wellen ist nicht mehr vollständig polarisiert. Wie man jedoch zeigen kann, ist die Beschreibung dieser Superposition ebenfalls mit Hilfe der Stokesparameter möglich, wobei hierfür die zeitlichen Mittelwerte der Intensitäten zu betrachten sind [23]. Im allgemeinen gilt für beliebig polarisiertes Licht die Ungleichung

$$I^2 \geq Q^2 + U^2 + V^2. \quad (4.8)$$

Für vollständig polarisiertes Licht gilt das Gleichheitszeichen. Ist das Licht unpolarisiert, so sind  $Q = U = V = 0$ .

## Additivität der Stokesparameter

Betrachtet man die Superposition von unabhängigen Lichtwellen, so addieren sich die Stokesparameter der Teilwellen. Unabhängig heißt hierbei, daß die Phasen der Teilwellen im betrachteten Zeitraum nicht miteinander korreliert sind.

Unter Berücksichtigung der **Additivität** kann man mit Hilfe der Stokesparameter teilweise polarisiertes Licht in einen polarisierten und einen unpolarisierten Anteil aufspalten. Man schreibt hierzu die Parameter in Vektorschreibweise untereinander und definiert so die **Stokesvektoren**:

$$\tilde{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} I \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2} \\ Q \\ U \\ V \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} I - \sqrt{Q^2 + U^2 + V^2} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (4.9)$$

Der Polarisationsgrad des Lichts ist dann durch

$$P = \frac{I_{\text{pol}}}{I} = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I} \quad (4.10)$$

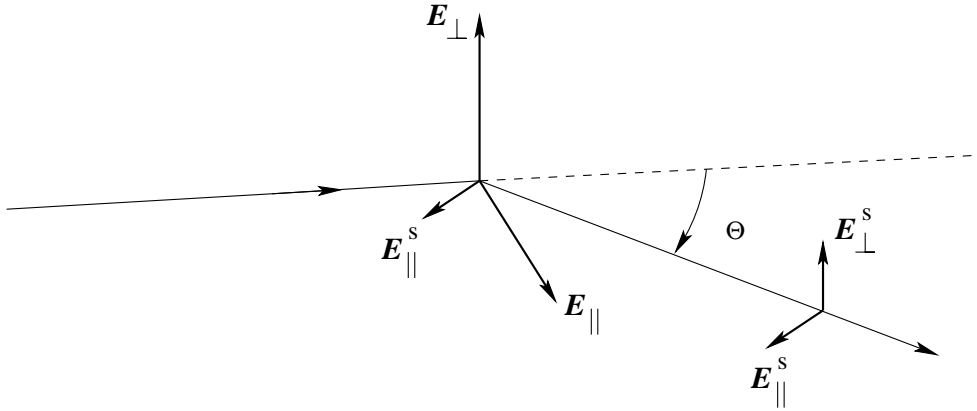
gegeben.

## Transformation der Stokesparameter

Die Einträge der Stokesvektoren sind Intensitäten. Um zu verstehen, wie sich diese bei Drehung der Polarisationsbasis um den Winkel  $\chi$  ändern, geht man von dem elektrischen Feld  $\mathbf{E}$  bezüglich eines Polarisationsystems  $\boldsymbol{\epsilon}_1$  und  $\boldsymbol{\epsilon}_2$  aus und transformiert in ein dazu gedrehtes System  $\boldsymbol{\epsilon}'_1$  und  $\boldsymbol{\epsilon}'_2$ . Aus dem elektrischen Feld  $\mathbf{E}'$  berechnet man die transformierten Stokesparameter  $I', Q', U', V'$  und vergleicht diese mit  $I, Q, U, V$  nach (4.6). Hieraus erhält man die Transformationsmatrix für Drehung der Polarisationsbasis um den Winkel  $\chi$

$$\hat{L}(\chi) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos 2\chi & \sin 2\chi & 0 \\ 0 & -\sin 2\chi & \cos 2\chi & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Die Abhängigkeit vom doppelten Drehwinkel zeigt, daß der Grad der Polarisation keine Orientierung hat: Für linear polarisiertes Licht erhält man nach Drehung des Polarisationsfilters um  $180^\circ$  wieder die gleiche Intensität. [43, 23]



**Abbildung 4.3:** Definition des Streusystems: Der einfallende Feldvektor wird in Komponenten parallel und senkrecht zur Streuebene aufgeteilt.

### 4.3 Thomson-Streumatrix

Die Beschreibung der Thomsonstreuung von beliebig polarisiertem Licht an Elektronen erhält man durch folgende Überlegungen: Die einfallende Welle habe den Polarisationsvektor  $\epsilon$ . Zerlegt man diesen in Anteile parallel bzw. senkrecht zur Streuebene<sup>1</sup>, so gilt für die Streuwahrscheinlichkeiten  $p_{\parallel}$  und  $p_{\perp}$  des parallelen bzw. senkrechten Anteils

$$p_{\parallel} \sim \frac{d\sigma}{d\Omega}(\Theta) = \frac{3}{8\pi} \sigma_T \cos^2 \Theta$$

$$p_{\perp} \sim \frac{d\sigma}{d\Omega}(0^\circ) = \frac{3}{8\pi} \sigma_T$$

Dies ergibt sich aus (2.41), wobei hier  $\Theta$  der Winkel zwischen der Richtung des einfallenden und gestreuten Lichts ist (vgl. Abb.4.3). Wegen der Proportionalität der Intensität zum Quadrat der gestreuten Feldamplitude  $(E_0^s)^2$  gilt weiterhin

$$E_{\parallel}^s = \left(\frac{3}{2}\sigma_T\right)^{\frac{1}{2}} \cos \Theta E_{\parallel}^0 \cos(\omega t - \phi_{\parallel})$$

$$E_{\perp}^s = \left(\frac{3}{2}\sigma_T\right)^{\frac{1}{2}} E_{\perp}^0 \cos(\omega t - \phi_{\perp}). \quad (4.12)$$

Die Phasen  $\phi_{\parallel}$  und  $\phi_{\perp}$  sollen dabei zeitlich konstant sein. Das so zerlegte elektrische Feld kann man benutzen, um analog zu (4.6) die gestreuten Stokesparameter  $I_{\parallel}^s, I_{\perp}^s, U^s, V^s$  zu berechnen. Es ergibt sich dabei

$$I_{\parallel}^s = \frac{3}{2}\sigma_T \cos^2 \Theta [E_{\parallel}^0]^2 = \frac{3}{2}\sigma_T \cos^2 \Theta I_{\parallel} \quad (4.13a)$$

$$I_{\perp}^s = \frac{3}{2}\sigma_T [E_{\perp}^0]^2 = \frac{3}{2}\sigma_T I_{\perp} \quad (4.13b)$$

$$U^s = \frac{3}{2}\sigma_T [2E_{\parallel}^0 E_{\perp}^0 \cos \Delta\phi] \cos \Theta = \frac{3}{2}\sigma_T U \cos \Theta \quad (4.13c)$$

$$V^s = -\frac{3}{2}\sigma_T [2E_{\parallel}^0 E_{\perp}^0 \sin \Delta\phi] \cos \Theta = \frac{3}{2}\sigma_T V \cos \Theta. \quad (4.13d)$$

Bei der Aufstellung der Beziehung (4.13) wurde von vollständig polarisiertem Licht ausgegangen. Man kann die vorangehenden Überlegungen aber auch auf teilweise polarisiertes Licht übertragen und kommt dabei auf die gleichen Beziehungen (4.13) mit dem einzigen Unterschied, daß zeitliche Mittelwerte der Intensitäten zu bilden sind.

<sup>1</sup>Diese wird durch den Wellenvektor des einfallenden und gestreuten Lichts festgelegt.

## Matrixschreibweise

Mit Hilfe der Stokesvektoren kann man für (4.13) folgendes schreiben:

$$\tilde{I}^s = \sigma_T \hat{R}_T(\Theta) \cdot \tilde{I}. \quad (4.14)$$

Die  $4 \times 4$ -Matrix  $\hat{R}_T$  läßt sich aus (4.13) durch Koeffizientenvergleich bestimmen, wenn man berücksichtigt, daß die Stokesvektoren  $\tilde{I}$  und  $\tilde{I}^s$  die Einträge  $I, Q, U, V$  und nicht  $I_{\parallel}, I_{\perp}, U, V$  haben:

$$\hat{R}_T(\Theta) = \frac{3}{4} \begin{pmatrix} \cos^2 \Theta + 1 & \cos^2 \Theta - 1 & 0 & 0 \\ \cos^2 \Theta - 1 & \cos^2 \Theta + 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \cos \Theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \cos \Theta \end{pmatrix}. \quad (4.15)$$

Im folgenden wird  $\hat{R}_T$  als **Thomson-Streumatrix** bezeichnet.

Wie man an (4.15) sieht, kann durch Thomsonstreuung keine zirkulare polarisierte Strahlung entstehen. Wenn  $U = V = 0$  sind, werden auch  $U^s = V^s = 0$  sein. Dagegen kann aus zirkular polarisiertem Licht linear polarisiertes werden. Schaut man senkrecht zur Einfallsrichtung, so bekommt man aus anfangs unpolarisiertem Licht rein linear polarisiertes. Dies kann man anschaulich so verstehen, daß das Elektron durch die einfallende Strahlung zum Schwingen in der Ebene senkrecht zu Einfallsrichtung angeregt wird. Von der Seite aus betrachtet sieht das Elektron dann wie ein auf und ab schwingender Dipol aus, der linear polarisiertes Licht aussendet.

Wichtig ist an dieser Stelle, daß die Streumatrix nur bezüglich des Streusystems die einfache Form (4.15) hat. Im allgemeinen muß der Stokesvektor des einfallenden Lichts zunächst in dieses spezielle System um einen Winkel  $\chi_{\text{in}}$  hineintransformiert werden. Der Winkel ergibt sich dabei aus der Orientierung der mitgeführten, vorab festzulegenden Polarisationsbasis des einfallenden Photons bezüglich der Streuebene. Anschließend muß man den gestreuten Vektor um einen zweiten, nicht zwingend identischen Winkel  $\chi_{\text{out}}$  in das System des Beobachters hineindreuen. Beides geschieht mit der in Abschnitt 4.2 besprochenen Matrix  $\hat{L}$  in der Form

$$\tilde{I}^s = \sigma_T \hat{L}(-\chi_{\text{out}}) \hat{R}_T(\Theta) \hat{L}(\chi_{\text{in}}) \tilde{I}. \quad (4.16)$$

Fällt die Strahlung nicht aus einer Richtung auf das Streuzentrum ein, so muß man die allgemeine Beziehung (4.16) noch über die verschiedenen Einfallsrichtungen integrieren:

$$\tilde{I}^s = \sigma_T \int \hat{L}(-\chi_{\text{out}}) \hat{R}_T(\Theta) \hat{L}(\chi_{\text{in}}) \tilde{I} \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (4.17)$$

Dies ist der an einem Elektron gestreute Stokesvektor in allgemeiner Form.

## Streuende Elektronenwolke

Beobachtet man Licht, das eine Wolke von ruhenden Streuzentren in einer bestimmten Richtung verläßt, so müssen die Beiträge nach Gleichung (4.17) zum gestreuten Stokesvektor entlang der Sichtlinie in der Wolke aufintegriert werden.<sup>2</sup> Dabei kann man von unabhängigen Streuzentren ausgehen, solange stimulierte Emission vernachlässigbar ist.

Zur Beschreibung des Sichtlinienintegrals führt man den Einheitsvektor  $\mathbf{e}$  in Blickrichtung bezüglich eines zunächst beliebig gewählten Koordinatensystems ein. Bei  $\mathbf{r}_0$  treffe der Blick auf die Elektronenwolke, an der die Streuung stattfindet, bei  $\mathbf{r}_L$  werde

<sup>2</sup>Es wird Einfachstreuung vorausgesetzt.



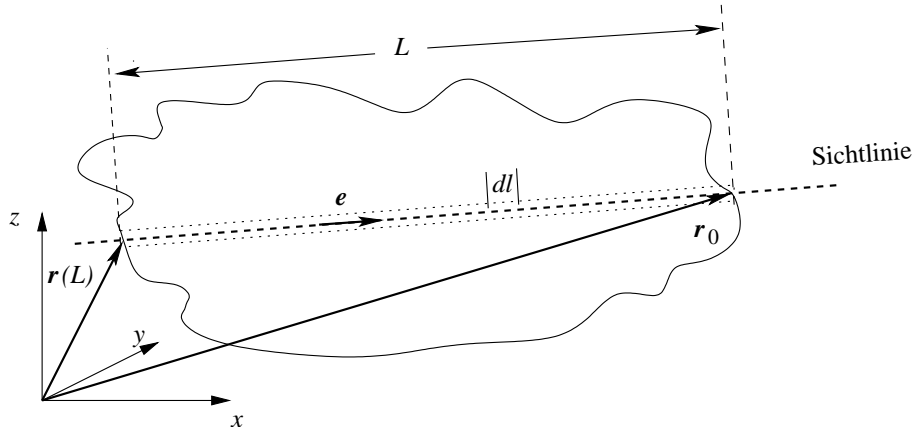


Abbildung 4.4: Ruhende Elektronenwolke

diese wieder verlassen (vgl. Abb.4.4). Die Zahl der Streuzentren an einem bestimmten Ort in der Wolke entspricht der Dichte der Elektronen  $n_e(\mathbf{r})$ . Damit ist  $\sigma_T n_e(\mathbf{r})$  proportional zur Streuwahrscheinlichkeit am Ort  $\mathbf{r}$ .

Das Integral entlang der Sichtlinie läßt sich mit  $\mathbf{r}(l) = \mathbf{r}_0 - l \mathbf{e}$  parametrisieren

$$\tilde{I}^s = \sigma_T \int_0^L n_e(l) \int \hat{L}(-\chi_{\text{out}}) \hat{R}_T(\Theta) \hat{L}(\chi_{\text{in}}) \tilde{I} \frac{d\Omega}{4\pi} dl, \quad (4.18)$$

wobei  $dl$  eine infinitesimale Verrückung parallel zu  $\mathbf{e}$  ist.  $L$  ist die Länge der Strecke, die man durch die Elektronenwolke zurückgelegt hat.

Ist der gestreute Stokesvektor für jedes Elektron gleich, so braucht die Integration entlang der Sichtlinie nur über die Elektronendichte  $n_e$  ausgeführt zu werden:

$$\tilde{I}^s = \tau \int \hat{L}(-\chi_{\text{out}}) \hat{R}_T(\Theta) \hat{L}(\chi_{\text{in}}) \tilde{I} \frac{d\Omega}{4\pi}. \quad (4.19)$$

Hierbei ist  $\tau$  die **optische Tiefe**, welche als

$$\tau = \sigma_T \int_0^L n_e(l) dl \quad (4.20)$$

definiert wurde. Diese stellt eine Lorentzinvariante dar, weil sich die Elektronendichte  $n_e$  umgekehrt zur Länge  $dl$  transformiert.

Mit Gleichung (4.19) lassen sich unter speziellen Voraussetzungen einfache Beispiele analytisch berechnen. In den nachfolgenden Kapiteln wird dies explizit für die Streuung der Photonen des CMB vorgeführt. [43, 23]



## Kapitel 5

# Streuung der Photonen des Mikrowellenhintergrundes

In diesem Kapitel wird auf die Streuung der Photonen des CMB an den Elektronen in Galaxienhaufen eingegangen. Es wird nur eine Pekuliarbewegung des Haufens mit der Geschwindigkeit  $\boldsymbol{v}'$  relativ zum CMB berücksichtigt. Man kann davon ausgehen, daß die statistisch verteilte, thermische Bewegung der Elektronen, welche den th-SZE hervorruft (vgl. Abschnitt 3.1), weitgehend von der gerichteten, globalen Strömung der Elektronen entkoppelt. Die thermische Bewegung wird daher hier vernachlässigt.

Unter der Voraussetzung, daß die Pekuliargeschwindigkeit des Galaxienhaufens vom Betrag her klein gegenüber der Lichtgeschwindigkeit ist ( $|\boldsymbol{v}'| \ll c$ ), kann man für die Streuung der Photonen des CMB an den Elektronen in Galaxienhaufen im Ruhesystem des Haufens von Thomsonstreuung, wie in Abschnitt 4.3 beschrieben, ausgehen. Die Ergebnisse des k-SZE, welche in Abschnitt 3.2 ohne Herleitung genannt wurden, werden hier begründet.

Eine Folge der Bewegung des Galaxienhaufens relativ zum CMB ist die Entstehung von teilweise linear polarisiertem Streulicht. Dies kann man sich anschaulich folgendermaßen erklären: Die CMBR wird als weitgehend isotrop und unpolarisiert vorausgesetzt. Es gibt keine Vorzugsrichtung. Bei Streuung an ruhenden Elektronen ist das Streulicht unpolarisiert, da nach Gleichung (4.17) über alle Einfallrichtungen der Photonen gemittelt wird. Bewegen sich die Elektronen jedoch in eine gemeinsame Richtung, so ist der CMB im Ruhesystem der Elektronen nicht mehr isotrop. Diese Anisotropie ist der Grund für die Entstehung von teilweise linear polarisiertem Streulicht.

Aus den obigen Überlegungen wird klar, daß bei der Streuung an thermischen Elektronen keine Polarisation auf Grund von Dipolstrahlung entstehen kann, weil es bei der statistischen Bewegung keinerlei Vorzugsrichtung gibt.

### 5.1 Wahl der Bezugssysteme

Das System des Beobachters ruhe bezüglich des CMB und werde mit  $K'$  bezeichnet. Alle Größen in diesem System seien mit einem Hochstrich gekennzeichnet. Der CMB habe in  $K'$  ein perfektes Schwarzkörperspektrum und sei unpolarisiert. Das Ruhesystem der Elektronen werde mit  $K$  bezeichnet.

Die Idee ist folgende: man transformiert den unpolarisierten, isotropen CMB in das Ruhesystem der Elektronen. Dort kann man den Streuprozess mit Gleichung (4.19) beschreiben. Der Polarisationsgrad des gestreuten Lichts läßt sich mit (4.10) berechnen. Da die Polarisation nach (2.16a) eine Lorentzinvariante ist, erübrigt sich die Rücktransformation nach  $K'$ .

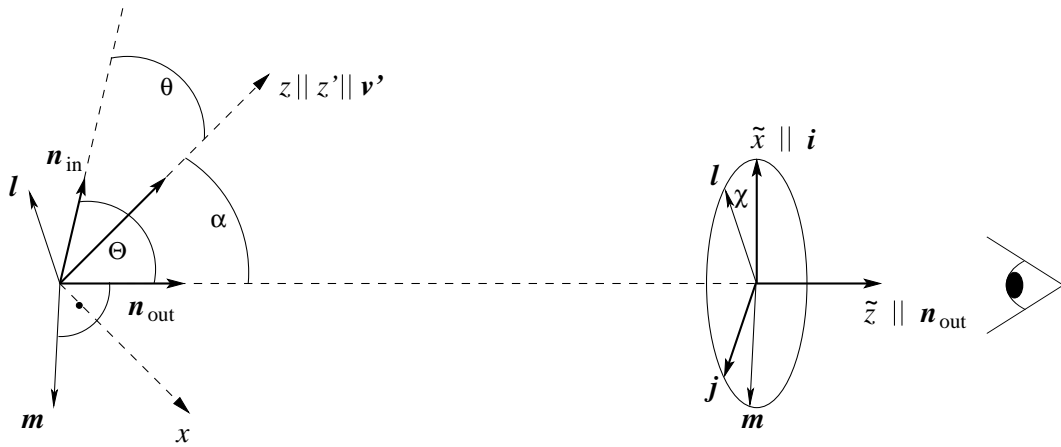


Abbildung 5.1: Veranschaulichung der gewählten Basisvektoren

Die Polarisation wird im Ruhesystem der Elektronen für einen mitbewegten Beobachter  $O$  berechnet. Die einzelnen zur Beschreibung nötigen Vektoren sind in Abb.5.1 illustriert. Deren Bedeutung wird im folgenden erläutert.

### Transformation des Spektrums

Im System  $K'$  hat der CMB ein Schwarzkörperspektrum. Nach Gleichung (2.15) gilt  $I'(\nu')/\nu'^3 = I(\nu)/\nu^3$ . Zur Vereinfachung wird die  $z$ -Achse parallel zur Geschwindigkeit  $\mathbf{v}'$  der Elektronen gelegt. Von  $K$  aus gesehen bewegt sich  $K'$  in negative  $x$ -Richtung. Die Frequenz  $\nu'$  erhält man nach Gleichung (2.13), indem  $\beta \rightarrow -\beta$  ersetzt wird:

$$\nu' = \gamma\nu(1 + \beta \cos \theta). \quad (5.1)$$

Die Richtung der Photonen in  $K$  weicht von der in  $K'$  nach den Aberrationsformeln (2.14) ab. Da der CMB in  $K'$  jedoch isotrop ist, kommt es nicht auf die spezielle Richtung vor der Transformation in  $K$  hinein an. Ein Schwarzkörperspektrum ist richtungsunabhängig.

Faßt man alles zusammen, so ergibt sich für die Intensität in  $K$

$$I(\nu, \theta) = \frac{\nu^3}{\nu'^3} I'(\nu') = A \frac{\nu^3}{e^{h\nu/k_B T(\theta)} - 1} \quad (5.2)$$

Hierin ist  $A = \frac{8\pi h}{c^2}$ . Es wurde hierbei die richtungsabhängige Temperatur als

$$T(\theta) = \frac{T_0}{\gamma(1 + \beta \cos \theta)} \quad (5.3)$$

definiert. Dabei ist  $T_0 = 2.728 \pm 0.004$  K [6] die heutige Temperatur des CMB.

Die kosmologische Transformation des Spektrums der CMBR hebt sich auf: Befindet sich der Galaxienhaufen bei einer Rotverschiebung  $z$  vom Beobachter  $O'$ , so ist die Temperatur der CMBR dort um einen Faktor  $1 + z$  größer:  $T(z) = T_0(1 + z)$ . Die Hintergrundstrahlung werde nun am Elektronengas des Haufens gestreut. Das von  $O'$  beobachtete Streulicht einer Frequenz  $\nu'$  wurde als Licht der Frequenz  $\nu(1 + z)$  ausgesandt. Daher heben sich die Faktoren  $1 + z$  wieder heraus und man kann die kosmologische Transformation bei der Rechnung ignorieren.

### Wahl der Polarisationsvektoren

Es soll unter anderem berechnet werden, welchen Polarisationsgrad der CMBR ein im System  $K$  ruhender Beobachter  $O$  messen würde. Dieser befinde sich unter einem Winkel  $\alpha$  zur Geschwindigkeit  $\mathbf{v}'$  ( $z$ -Achse). Zur Beschreibung werden Kugelkoordinaten gewählt. Damit ist der normierte Richtungsvektor des einfallenden Photons durch

$$\mathbf{n}_{\text{in}} = \frac{\mathbf{k}_{\text{in}}}{|\mathbf{k}_{\text{in}}|} = \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} \quad (5.4)$$

gegeben. Die Ausbreitungsrichtung des gestreuten Photons liegt fest, denn es muß den Beobachter  $O$  erreichen. Man wählt die  $x$ -Achse daher so, daß  $\mathbf{k}_{\text{out}}$  in der  $x, z$ -Ebene liegt und sich damit

$$\mathbf{n}_{\text{out}} = \begin{pmatrix} \sin \alpha \\ 0 \\ \cos \alpha \end{pmatrix} \quad (5.5)$$

schreiben läßt. Der Winkel zwischen  $\mathbf{n}_{\text{in}}$  und  $\mathbf{n}_{\text{out}}$  werde mit  $\Theta$  bezeichnet und ergibt sich aus dem Skalarprodukt

$$\mathbf{n}_{\text{in}} \cdot \mathbf{n}_{\text{out}} = \cos \Theta = \cos \theta \cos \alpha + \sin \theta \cos \varphi \sin \alpha. \quad (5.6)$$

Dieses ist von der Richtung des einfallenden Photons  $\mathbf{k}_{\text{in}}$  abhängig.

In Abschnitt 4.3 wurde erwähnt, daß sich die Streuung am einfachsten bezüglich der Streuebene, welche durch das einfallende und das gestreute Photon festgelegt wird, beschreiben läßt. Deshalb wird als Ergänzung zu  $\mathbf{n}_{\text{out}}$  die Polarisationsbasis

$$\mathbf{m} = \frac{\mathbf{n}_{\text{out}} \times \mathbf{n}_{\text{in}}}{|\mathbf{n}_{\text{out}} \times \mathbf{n}_{\text{in}}|} \quad (5.7a)$$

$$\mathbf{l} = \frac{\mathbf{n}_{\text{in}} - \cos \Theta \mathbf{n}_{\text{out}}}{|\mathbf{n}_{\text{in}} - \cos \Theta \mathbf{n}_{\text{out}}|} = \frac{1}{\sin \Theta} (\mathbf{n}_{\text{in}} - \cos \Theta \mathbf{n}_{\text{out}}) \quad (5.7b)$$

gewählt. Der Vektor  $\mathbf{l}$  liegt dabei in der Streuebene,  $\mathbf{m}$  steht senkrecht auf dieser. Die so gewählte Polarisationsbasis ist von der jeweiligen Richtung des einfallenden Photons abhängig.

Für den Beobachter  $O$  wird das Koordinatensystem in  $K$  wie folgt festgelegt: Die Koordinatenachsen werden zur Unterscheidung von dem System, welches mit der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}'$  verknüpft ist, mit  $\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z}$  bezeichnet. Die  $\tilde{z}$ -Achse liege parallel zur Richtung  $\mathbf{n}_{\text{out}}$  des gestreuten Photons. Weiterhin sei die  $\tilde{x}$ -Richtung durch

$$\mathbf{i} = \begin{pmatrix} -\cos \alpha \\ 0 \\ \sin \alpha \end{pmatrix} \quad (5.8)$$

gegeben. Zur Vollständigkeit nimmt man den Vektor  $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$  hinzu, wobei dieser für die weitere Rechnung nicht von Bedeutung ist. Damit sind alle benötigten Vektoren festgelegt (vgl. Abb.5.1).

Bei der Thomsonstreuung von unpolarisiertem Licht kann keine elliptische Polarisation entstehen ( $V \equiv 0$ ). Durch die obige Wahl der Basisvektoren wird auch der Parameter  $U = 0$ . Man muß also nur die Stokesparameter  $I, Q$  des gestreuten Lichts berechnen.

## 5.2 Berechnung des gestreuten Stokesvektors

Da der CMB vor der Streuung am ICM unpolarisiert ist, benötigt man keine Transformation in die im vorangehenden Abschnitt definierte Streubasis  $\mathbf{l}, \mathbf{m}, \mathbf{n}_{\text{out}}$ . Für die Transformation von der Streubasis in die Basis des Beobachters  $O$  benötigt man den Winkel  $\chi := \chi_{\text{out}}$ , der sich aus dem Skalarprodukt von  $\mathbf{i}$  und  $\mathbf{l}$  bzw. deren Kreuzprodukt ergibt:

$$\cos \chi = \mathbf{i} \cdot \mathbf{l} = \frac{1}{\sin \Theta} (\cos \theta \sin \alpha + \sin \theta \cos \varphi \cos \alpha) \quad (5.9a)$$

$$\sin \chi = |\mathbf{i} \times \mathbf{l}| = \frac{\sin \theta \sin \varphi}{\sin \Theta}. \quad (5.9b)$$

Nun läßt sich der gestreute Stokesvektor  $\tilde{I}_\nu^s$  nach (4.19) berechnen, was auf

$$\tilde{I}_\nu^s(\alpha) = \frac{3\tau}{16\pi} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} I_\nu(\theta) \begin{pmatrix} 1 + \cos^2 \Theta \\ -\sin^2 \Theta \cos 2\chi \\ -\sin^2 \Theta \sin 2\chi \\ 0 \end{pmatrix} \sin \theta \, d\theta \, d\varphi \quad (5.10)$$

führt. Hierbei ergeben sich  $\cos^2 \Theta$ ,  $\cos 2\chi$  und  $\sin 2\chi$  aus den Beziehungen

$$\cos^2 \Theta = C_\alpha^2 C_\theta^2 + \frac{1}{2} S_{2\alpha} S_{2\theta} C_\varphi + S_\alpha^2 S_\theta^2 C_\varphi^2 \quad (5.11a)$$

$$\begin{aligned} \cos 2\chi &= 2C_\chi^2 - 1 \\ &= \frac{2}{S_\Theta^2} (S_\alpha^2 C_\theta^2 + \frac{1}{2} S_{2\alpha} S_{2\theta} C_\varphi + S_\alpha^2 S_\theta^2 C_\varphi^2 - \frac{1}{2}) \end{aligned} \quad (5.11b)$$

$$\begin{aligned} \sin 2\chi &= 2C_\chi S_\chi \\ &= \frac{1}{2S_\Theta^2} (S_\alpha S_{2\theta} S_\varphi + C_\alpha S_\theta^2 S_{2\varphi}), \end{aligned} \quad (5.11c)$$

wobei die Abkürzungen  $S_x = \sin x$  und  $C_x = \cos x$  verwendet wurden.

Setzt man (5.11) in (5.10) ein, so kürzen sich die Faktoren  $1/S_\Theta^2$  heraus. Integriert man anschließend über  $d\varphi$  und beachtet, daß die Integrale  $\int_0^{2\pi} C_{nx} \, dx = \int_0^{2\pi} S_{nx} \, dx = 0$  für  $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$  und  $\int_0^{2\pi} C_x^2 \, dx = \int_0^{2\pi} S_x^2 \, dx = \pi$  ergeben, so erhält man mit den Abkürzungen  $\mu = C_\theta$  und  $d\mu = -S_\theta \, d\theta$

$$\tilde{I}_\nu^s(\alpha) = \frac{3\tau}{8} \int_{-1}^1 I_\nu(\mu) \begin{pmatrix} 1 + \mu^2 + \frac{S_\alpha^2}{2}(1 - 3\mu^2) \\ \frac{S_\alpha^2}{2}(1 - 3\mu^2) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} d\mu. \quad (5.12)$$

Hier sieht man klar die Aufspaltung des Stokesvektors der gestreuten Strahlung in polarisierten ( $S_\alpha^2(1-3\mu^2)/2, S_\alpha^2(1-3\mu^2)/2, 0, 0$ ) und unpolarisierten ( $1+\mu^2, 0, 0, 0$ ) Anteil. Des weiteren entsteht bei der Thomsonstreuung der CMBR keine elliptische Polarisation, was aus  $V = 0$  folgt. Auf Grund der Wahl der Polarisationsbasis des Beobachters  $O$  ist auch der Parameter  $U = 0$ . Daraus folgt, daß der Polarisationsvektor  $\epsilon$  des gestreuten Lichts parallel zu  $\mathbf{j}$  ist und damit senkrecht auf der in die Himmelsebene projizierten Komponente der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}'$  steht.

### 5.3 Berechnung der Polarisation

In Gleichung (5.12) tritt ein Integral über  $\mu^2 I_\nu(\mu)$  auf, welches weiter unten numerisch behandelt wird. Eine analytische Lösung ist über Reihenentwicklung mit Hilfe von Computer-Algebra-Programmen möglich, führt jedoch zu unhandlichen Ausdrücken. Im Limes kleiner bzw. großer Frequenzen kann der gestreute Stokesvektor berechnet werden, was im folgenden geschehen soll. Die Ergebnisse der Rechnungen werden in Abschnitt 5.4 noch ausführlich diskutiert.

#### Integrierte Polarisation

Da Thomsonstreuung unabhängig von der Frequenz des einfallenden Strahlung ist, läßt sich (5.12) vor der Berechnung des Winkelintegrals über  $\nu$  integrieren. Dies bedeutet, daß man statt  $I_\nu(\mu)$  die integrierte Intensität  $I(\mu) = ST^4(\mu)$  einsetzen kann. Die Winkelintegration wird dadurch analytisch durchführbar, wobei Integrale der Form

$$\int_{-1}^1 \frac{1}{(1 + \beta\mu)^4} d\mu = -\frac{1}{3\beta} \left[ \frac{1}{(1 + \beta\mu)^3} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} \left[ \frac{3 + \beta^2}{(1 - \beta^2)^3} \right]$$

$$\int_{-1}^1 \frac{\mu^2}{(1 + \beta\mu)^4} d\mu = \frac{1}{6} \frac{\partial^2}{\partial \beta^2} \frac{-1}{\beta} \left[ \frac{1}{1 + \beta\mu} \right]_{-1}^1 = \frac{2}{3} \left[ \frac{1 + 3\beta^2}{(1 - \beta^2)^3} \right]$$

aufzutreten. Unter Verwendung dieser Beziehungen erhält man als exakte Lösung für den gestreuten Stokesvektor in  $K'$

$$\tilde{I}^s(\alpha) = \tau\gamma^2 ST_0^4 \begin{pmatrix} 1 + \beta^2 - S_\alpha^2 \beta^2 \\ -S_\alpha^2 \beta^2 \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Der Polarisationsgrad des gestreuten Lichts läßt sich nach Gleichung (4.10) aus den Stokesparametern berechnen. Dazu muß jedoch neben der gestreuten Intensität  $I^s(\alpha)$  auch die ungestreute Intensität  $I(\alpha)$  und die absorbierte Intensität  $I_{\text{abs}}(\alpha) = \tau I(\alpha)$  berücksichtigt werden. Der Polarisationsgrad der CMBR ergibt sich damit durch

$$P = \frac{\sqrt{Q^2 + U^2 + V^2}}{I_{\text{tot},\nu}(\alpha)} = \frac{|Q(\alpha)|}{(1 - \tau)I_\nu(\alpha) + I_\nu^s(\alpha)}. \quad (5.14)$$

Entwicklung von (5.14) für  $\beta \ll 1$  bis  $\mathcal{O}(\beta^2)$  führt auf

$$\boxed{P(\alpha) = S_\alpha^2 \beta^2 \tau = \beta_\perp^2 \tau}. \quad (5.15)$$

Wie man hier direkt sieht, kommt es für den Polarisationsgrad nur auf die Komponente der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}'$  in der Himmelsebene und die optische Tiefe  $\tau$  entlang der Sichtlinie an.  $\tau$  ist dabei vom Ort in der Himmelsebene abhängig. Wegen der Lorentz-invarianz des Polarisationsgrads gilt (5.15) auch für den relativ zum CMB ruhenden Beobachter  $O'$ , wenn dieser die Polarisationsbasis wie der Beobachter  $O$  gewählt hat.

Das Ergebnis (5.15) stimmt mit dem von *Audit* und *Simmons* 1999 überein [44]. Wie sie anmerkten, ist der Polarisationsgrad um einen Faktor 10 größer als der von *Sunyaev* und *Zeldovich* 1980. Deren damaliges Ergebnis sollte jedoch nur für den RJ-Bereich des Spektrums gelten [10].

## Wien-Bereich

Es soll nun der Polarisationsgrad der CMBR im hochfrequenten Wien-Bereich des Spektrums berechnet werden. Dazu setzt man die Wien-Näherung (2.36a)

$$I_\nu^W(\mu) \approx A \nu^3 e^{-\frac{h\gamma}{k_B T_0} \nu(1+\beta\mu)},$$

in Gleichung (5.12) ein. Mit den Definitionen  $x := \frac{h\gamma}{k_B T_0} \nu$  und  $A' := A \left(\frac{k_B T_0}{h\gamma}\right)^3$  lässt sich der gestreute Stokesvektor als

$$\hat{I}_x^W(\alpha) = \frac{3\tau}{8} A' x^3 e^{-x} \int_{-1}^1 e^{-\beta x \mu} \begin{pmatrix} 1 + \mu^2 + \frac{S_\alpha^2}{2}(1 - 3\mu^2) \\ \frac{S_\alpha^2}{2}(1 - 3\mu^2) \end{pmatrix} d\mu$$

schreiben. Hierin hat man Integrale von Typ

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 e^{-\beta x \mu} d\mu &= -\frac{1}{\beta x} \left[ e^{-\beta x \mu} \right]_{-1}^1 = \frac{2 \sinh(\beta x)}{\beta x} \\ \int_{-1}^1 \mu^2 e^{-\beta x \mu} d\mu &= \partial_{(\beta x)}^2 \left[ \frac{2 \sinh(\beta x)}{\beta x} \right] = 2 \left[ \frac{\sinh(\beta x)}{\beta x} - \frac{2 \cosh(\beta x)}{(\beta x)^2} + \frac{2 \sinh(\beta x)}{(\beta x)^3} \right] \end{aligned}$$

zu lösen. Der gestreute Stokesvektor hat damit im Wien-Bereich die Form

$$\hat{I}_x^W(\alpha) = \frac{3\tau}{4} A' x^3 e^{-x} \cdot \begin{pmatrix} (1 + C_\alpha^2) \frac{\sinh(\beta x)}{\beta x} + (C_\alpha^2 + C_{2\alpha}) \left[ \frac{\sinh(\beta x)}{(\beta x)^3} - \frac{\cosh(\beta x)}{(\beta x)^2} \right] \\ S_\alpha^2 \left[ \frac{3 \cosh(\beta x)}{(\beta x)^2} - \sinh(\beta x) \left[ \frac{1}{\beta x} + \frac{3}{(\beta x)^3} \right] \right] \end{pmatrix}. \quad (5.16)$$

Die Wien-Näherung ist für Frequenzen  $\nu \gg \nu_{\max}$  gültig. Das Maximum des Spektrums der kosmischen Mikrowellenhintergrundstrahlung liegt nach dem Wienschen Verschiebungsgesetz (2.35) bei  $\nu_{\max} \approx 160$  GHz, woraus  $x_{\max} \approx 2.84$  folgt. Betrachtet man Frequenzen im Bereich  $160 \text{ GHz} \leq \nu \leq 10^4 \text{ GHz}$ , so entspricht dies  $2.84 \leq x \leq 177.7$ . Da in der Gleichung (5.16) immer Terme  $\beta x$  auftauchen und  $\beta \approx 10^{-2}$  ist, kann keine weitere Näherung für kleine  $\beta$  gemacht werden. Deshalb nimmt der Polarisationsgrad nach Gleichung (5.14) im Wien-Bereich die Form

$$P_x^W(\alpha) = \frac{\left| S_\alpha^2 \left[ \frac{3 \cosh(\beta x)}{(\beta x)^2} - \sinh(\beta x) \left[ \frac{1}{\beta x} + \frac{3}{(\beta x)^3} \right] \right] \right|}{\frac{4}{3} \frac{1-\tau}{\tau} e^{-\beta C_\alpha x} + (1 + C_\alpha^2) \frac{\sinh(\beta x)}{\beta x} + (C_\alpha^2 + C_{2\alpha}) \left[ \frac{\sinh(\beta x)}{(\beta x)^3} - \frac{\cosh(\beta x)}{(\beta x)^2} \right]} \quad (5.17)$$

an. Erst für sehr hohe Frequenzen  $\beta x \gg 1$  vereinfacht sich der Polarisationsgrad im Wien-Bereich zu

$$P_x^W(\alpha) \stackrel{\beta x \gg 1}{\approx} \frac{S_\alpha^2}{(1 + C_\alpha^2)}. \quad (5.18)$$

Diese Beziehung stellt ein eher akademisches Ergebnis dar, weil bei sehr hohen Frequenzen das Spektrum des CMB stark abfällt und vor allem von anderen Objekten, wie beispielsweise Ferninfrarotstrahlung von Galaxien, galaktischer Cirrus (Staub), überstrahlt wird. Außerdem verliert die Thomsonnaherung für sehr hohe Frequenzen ihre Gültigkeit.



## Rayleigh-Jeans-Bereich

Die Intensität  $I_\nu(\mu)$  in (5.12) kann im niederfrequenten Limes durch die Rayleigh-Jeans-Näherung (2.36b)

$$I_\nu^{\text{RJ}}(\mu) \approx \frac{Ak_B}{h} \nu^2 T(\mu)$$

beschrieben werden. Da  $\beta \ll 1$  vorausgesetzt wird, läßt sich die richtungsabhängige Temperatur  $T(\mu)$  bis in 2. Ordnung von  $\beta$  entwickeln:

$$T(\mu) = \frac{T_0}{\gamma} (1 - \beta\mu + \beta^2\mu^2 + \mathcal{O}(\beta^3)). \quad (5.19)$$

Der zweite Term der rechten Seite kann weglassen werden, da nur in  $\mu$  gerade Terme einen Beitrag zum Winkelintegral liefern. Einsetzen von (5.19) in (5.12) und Integration über  $\mu$  führt auf

$$\tilde{I}_\nu^{\text{RJ}}(\alpha) = \tau \frac{Ak_B T_0}{h\gamma} \nu^2 \left( 1 + \frac{2}{5}\beta^2 - \frac{1}{10}S_\alpha^2\beta^2 - \frac{1}{10}S_\alpha^2\beta^2 \right). \quad (5.20)$$

Wie man sieht, ist  $|Q^{\text{RJ}}|$  von 2. Ordnung in  $\beta$ . Daher darf für eine konsistente Näherung bei der Berechnung des Polarisationsgrads nur die nullte Ordnung von  $I_{\text{tot},\nu}(\alpha)$  berücksichtigt werden:  $I_{\text{tot},\nu}(\alpha) \approx \frac{Ak_B T_0}{h\gamma} \nu^2$ . Für den Polarisationsgrad im Rayleigh-Jeans-Bereich ergibt sich somit

$$P^{\text{RJ}}(\alpha) = \frac{1}{10} \beta_\perp^2 \tau. \quad (5.21)$$

Dieses Ergebnis stimmt mit dem von *Sunyaev* und *Zeldovich* 1980 überein (vgl. (3.17)). Der Polarisationsgrad hängt nicht von der Frequenz ab.

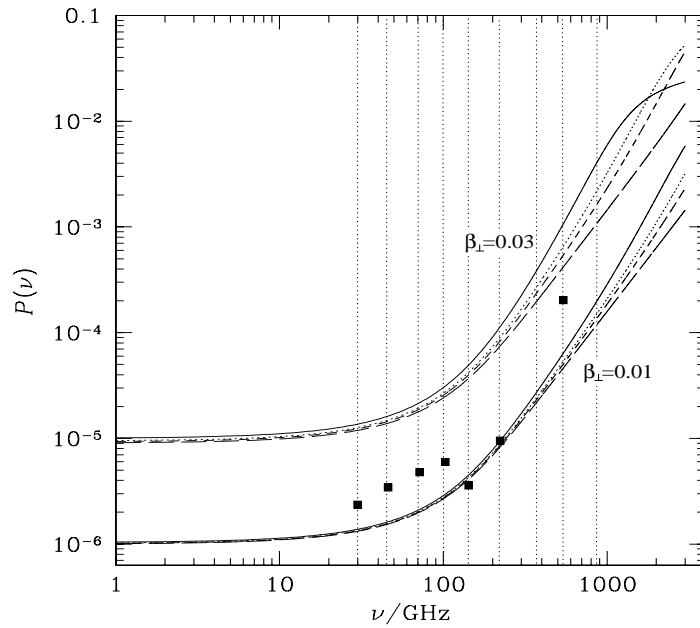
## 5.4 Numerische Rechnungen

Die numerische Integration von Gleichung (5.12) wurde mit einem Gauß-Legendre-Verfahren durchgeführt. Die Ergebnisse dieser Rechnung sind in Abbildung 5.2 für verschiedene Geschwindigkeiten  $\beta_\perp$  und Inklinationen  $\alpha$  dargestellt. Alle Berechnungen wurden mit  $\tau = 0.1$  durchgeführt.

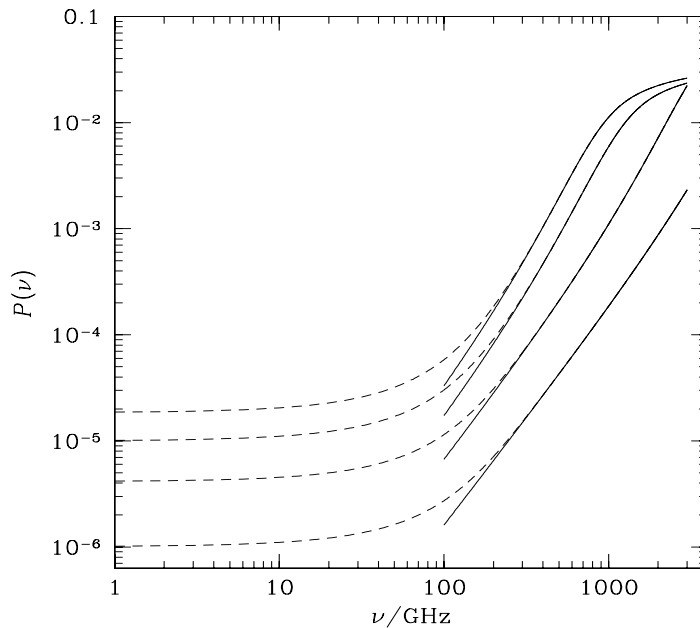
Man erkennt deutlich den frequenzunabhängigen RJ-Limes des Polarisationsgrads nach Gleichung (5.21) für kleine  $\nu$ . Weiterhin sieht man eine leichte Abhängigkeit vom Winkel  $\alpha$  im Wien-Bereich. Für  $\beta_\perp = 0.03$  und  $\alpha = 15^\circ$  geht die Polarisation bei hohen Frequenzen in die Sättigung. Allerdings folgt hieraus für  $\beta = \beta_\perp / \cos(\alpha)$  ein Wert von 0.12. Typische Pekuliargeschwindigkeiten von Galaxienhaufen liegen im Bereich einiger 1000 km/s, was einem  $\beta$  im Bereich  $10^{-2}$  entspricht. Daher ist die Beobachtung der Sättigung an Galaxienhaufen nicht zu erwarten.

Zusätzlich wurden in Abbildung 5.2 die verschiedenen Frequenzbänder der PLANCK Mission (gepunktete Linien) mit den geplanten Sensitivitäten der einzelnen Polarimeter (Quadrate) eingetragen [45, 44]. Im Wien-Bereich ergibt sich der größte Polarisationsgrad. Die Empfindlichkeit der Polarimeter der PLANCK Mission reichen in diesem Frequenzbereich aber erst für  $\tau\beta_\perp^2 \approx 10^{-5}$  zu einer Messung des Polarisationsgrads der CMBR in Richtung von Galaxienhaufen aus.

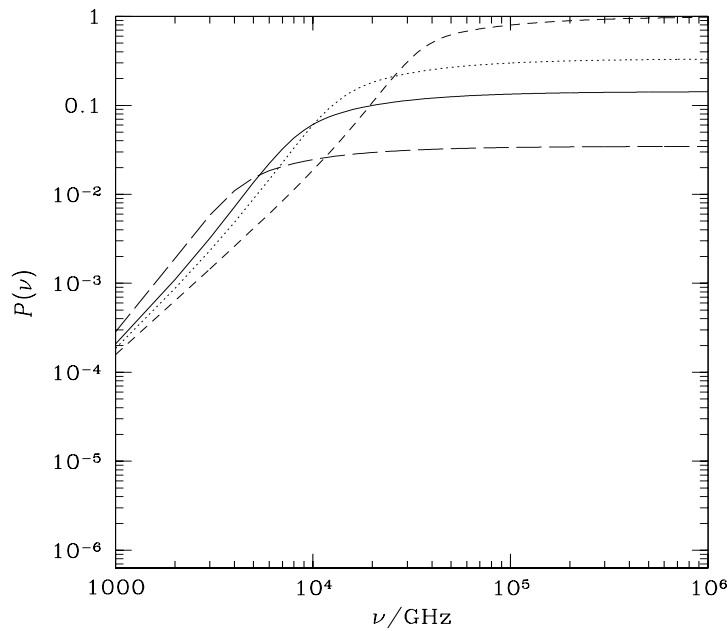
Die Gesamtpolarisation über alle Frequenzen ergibt sich aus Gleichung (5.15) und liegt für typische Werte von  $\tau$  und  $\beta_\perp$  im Bereich von  $10^{-5}$ . Diese sollte auch mit MAP und PLANCK messbar sein und liegt in weiten Bereichen über dem erwarteten primordialen Polarisationsgrad [44].



**Abbildung 5.2:** Numerische Ergebnisse für den frequenzabhängigen Polarisationsgrad des CMB in der Richtung von großen Galaxienhaufen: Alle Kurven wurden für  $\tau = 0.1$  berechnet. Die Gruppen entsprechen  $\beta_{\perp} = 0.01$  und  $\beta_{\perp} = 0.03$ . Innerhalb der Gruppe gilt von unten nach oben  $\alpha = 90^{\circ}, 45^{\circ}, 30^{\circ}, 15^{\circ}$ . An der Kurve  $\beta_{\perp} = 0.03, \alpha = 15^{\circ}$  sieht man, daß der Polarisationsgrad für hohe Frequenzen in die Sättigung geht. Zusätzlich wurden die verschiedenen Frequenzbänder der PLANCK Mission (gepunktete Linien) mit den geplanten Sensitivitäten der einzelnen Polarimeter (Quadrate) eingetragen [45, 44].



**Abbildung 5.3:** Vergleich der numerischen Ergebnisse (gestrichelt) für den Polarisationsgrad mit denen der Näherungsformel (durchgezogen) im Wien-Bereich des Spektrums der CMBR für  $\tau = 0.1$ : Der Polarisationsgrad wurde (von unten nach oben) für die Paare  $(\alpha, \beta_{\perp}) = (45^{\circ}, 0.01), (30^{\circ}, 0.02), (15^{\circ}, 0.03), (15^{\circ}, 0.04)$  dargestellt. Man erkennt eine sehr gute Übereinstimmung der Näherungsformel mit den numerischen Ergebnissen.



**Abbildung 5.4:** Grad der Polarisation bei sehr hohen Frequenzen nach Gleichung (5.17): Es wurde bei allen Kurven  $\tau = 0.1$  und  $\beta = 0.01$  gesetzt. Für die Winkel gilt:  $\alpha = 15^\circ$  (lang gestrichelt),  $\alpha = 30^\circ$  (durchgezogen),  $\alpha = 45^\circ$  (gepunktet) und  $\alpha = 90^\circ$  (gestrichelt). Der Limes nach Gleichung (5.18) ist deutlich erkennbar.

In Abbildung 5.3 ist der Grad der Polarisation nach der numerischen Rechnung zusammen mit den Ergebnissen der Näherungsformel (5.17) aufgetragen. Es ergibt sich eine sehr gute Übereinstimmung der Näherung mit den numerischen Werten. Mit erdgebundenen und Ballon-Experimenten sollte eine Messung des Polarisationsgrads der CMBR in Richtung von Galaxienhaufen in Zukunft vorangetrieben werden. Die Gleichung (5.17) stellt dabei eine brauchbare Näherung für den Polarisationsgrad im Wien-Bereich dar. Bemerkenswert ist, daß man mit (5.17) die Polarisation auch für sehr hohe Frequenzen berechnen kann, während es bei der numerischen Integration von Gleichung (5.12) zu Problemen kommt. Für Frequenzen  $\nu > 10^{12}$  Hz ist die Polarisation in Abbildung 5.4 dargestellt. Man erkennt deutlich den Limes nach Gleichung (5.18).

## 5.5 Relative Intensitätsänderung

Als letztes soll noch das Ergebnis von *Sunyaev* und *Zeldovich* 1980 [10] für die relative Intensitätsänderung der CMBR in Richtung eines Galaxienhaufens, welcher sich relativ zum CMB mit einer Geschwindigkeit  $\mathbf{v}$  bewegt, hergeleitet werden. Sie gaben hierfür damals die Gleichung

$$\frac{\Delta I_\nu}{I_\nu} = -\tau\beta_{\parallel} \frac{x e^x}{e^x - 1} \quad (5.22)$$

an, mit  $x = \frac{h\nu}{k_B T_0}$ .<sup>1</sup>

Die relative Intensitätsänderung ist nach (2.16) eine Lorentzinvariante. Daher kann ihre Berechnung im Ruhesystem der Elektronen  $K$  für den mitbewegten Beobachter  $O$

<sup>1</sup>Weiter oben wurde  $x$  mit einem Faktor  $\gamma$  definiert. Da Gleichung (5.22) nur bis in 1. Ordnung für kleines  $\beta_{\parallel}$  und nicht zu großes  $x$  gilt, kann man diesen hier wegen  $\gamma \approx 1 + \mathcal{O}(\beta^2)$  weglassen.

erfolgen (vgl. Abschnitt 5.1). Dazu geht man von

$$\begin{aligned} \frac{\Delta I_\nu}{I_\nu} &= \frac{I_{\text{tot},\nu} - I_\nu}{I_\nu} = \frac{I_\nu^s - \tau I_\nu}{I_\nu} \\ &= \frac{I_\nu^s}{I_\nu} - \tau \end{aligned} \quad (5.23)$$

aus. Für reine radiale Bewegung ( $S_{\alpha=0^\circ} = 0$ ) vereinfacht sich  $I_\nu^s$  nach Gleichung (5.12) zu

$$I_\nu^s = \frac{3\tau}{8} \int_{-1}^1 I_\nu(\mu) [1 + \mu^2] d\mu. \quad (5.24)$$

Der Parameter  $Q^s$  wird identisch gleich Null, was zeigt, daß durch eine radiale Bewegung des Haufens keine lineare Polarisation entsteht.

Die Intensität  $I_\nu(\mu)$  läßt sich für kleines  $\beta \equiv \beta_{\parallel}$  und nicht zu großes  $x$  ( $x\beta \ll 1$ ) entwickeln:

$$\begin{aligned} I_\nu(\mu) &= A' \frac{x^3}{e^{x(1+\beta\mu)} - 1} \stackrel{x\beta \ll 1}{\approx} A' \frac{x^3}{e^x(1+x\beta\mu) - 1} \\ &= A' \frac{x^3}{e^x - 1} \frac{1}{1 + \frac{x\beta\mu}{e^x - 1}} \approx A' \frac{x^3}{e^x - 1} \left( 1 - \frac{x\beta\mu}{e^x - 1} \right) \\ &= I_0 \left( 1 - \frac{x\beta\mu}{e^x - 1} \right). \end{aligned} \quad (5.25)$$

Da bei der Integration nur gerade Potenzen in  $\mu$  beitragen, erhält man für die gestreute Intensität

$$I_\nu^s \approx \tau I_0$$

Setzt man dies zusammen mit

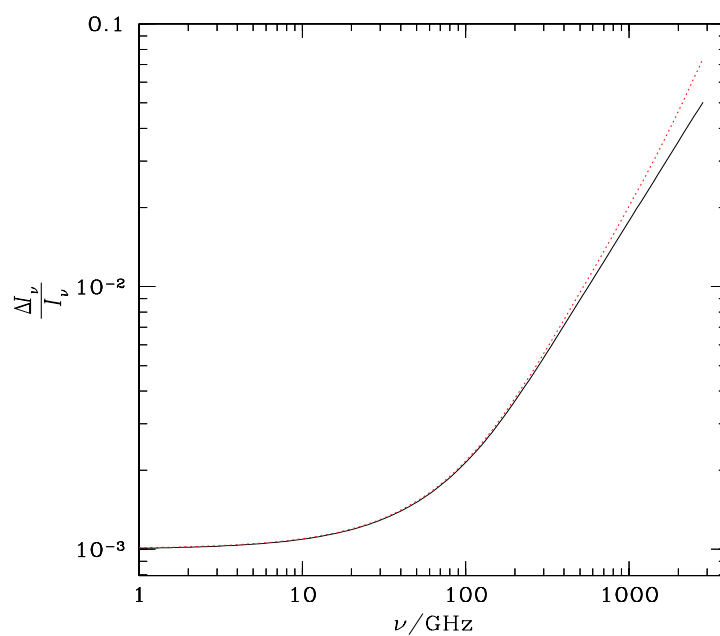
$$\frac{1}{I_\nu} = \frac{1}{I_\nu(\mu=1)} \approx \frac{1}{I_0} \left( 1 + \frac{x\beta}{e^x - 1} \right)$$

in Gleichung (5.23) ein, so ergibt sich für die relative Intensitätsänderung insgesamt

$$\frac{\Delta I_\nu}{I_\nu} = \tau \beta_{\parallel} \frac{x e^x}{e^x - 1}. \quad (5.26)$$

Bis auf das Vorzeichen ist dieses Ergebnis mit (5.22) identisch. Die Erklärung für die unterschiedlichen Vorzeichen liegt darin, daß *Sunyaev* und *Zeldovich* die positive Geschwindigkeitsrichtung vom Beobachter weg und nicht wie hier auf den Beobachter zu definierten.

In Abbildung 5.5 wurde die relative Intensitätsänderung nach der Näherungsformel (5.22) zusammen mit den Ergebnissen einer numerischen Berechnung dargestellt. Man erkennt deutlich die Grenzen der Gültigkeit im hohen Wienbereich des Spektrums, während es eine glänzende Übereinstimmung im Rayleigh-Jeans-Bereich gibt.



**Abbildung 5.5:** Relative Intensitätsänderung für  $\tau\beta_{\parallel} = 0.001$ : Die durchgezogene Linie entspricht den Ergebnissen der numerischen Rechnung, wohingegen die gepunktete Linie die Näherungsformel von *Sunyaev* und *Zeldovich* wiedergibt. Im hohen Wien-Bereich erkennt man das Ende der Gültigkeit der verwendeten Näherungen.



## Kapitel 6

# Kinetische Signatur durch Rotation

Wenn in diesem Kapitel von „kinetischer Signatur“ die Rede ist, bedeutet dies: Eine messbare, vom Ort in der Himmelsebene abhängige relative Intensitätsänderung der CBMR in Richtung von Galaxienhaufen auf Grund der Streuung am relativ zum CMB bewegten ICM. Eine mögliche Bewegungsart des ICM ist die Translation. Diese führt zum k-SZE und wurde in Abschnitt 3.2 bzw. Kapitel 5 diskutiert.

Hier soll als weitere mögliche Bewegungsart des ICM die Rotation untersucht werden. Im allgemeinen wird davon ausgegangen, daß bei der Strukturbildung im Kosmos keine gerichtete Rotation entsteht. Dagegen zeigen aber alle gravitativ gebundenen Systeme in unserer Umgebung – Sonne, Planeten, Sterne, Galaxien – Rotation.

Angenommen Galaxienhaufen würden intrinsisch nicht rotieren, so kann man sich aber vorstellen, daß z.B. durch Haufen-Haufen Wechselwirkung oder Wechselwirkungen von einzelnen Galaxien innerhalb des Haufens gerichtete Strömungen des ICM angeregt werden können. Dies stünde nicht im Widerspruch zu der Annahme eines nichtrotierenden Kosmos, da so nur lokale Abweichungen entstehen.

Bei der Auswertung der Röntgen-Morphologie von Galaxienhaufen wurden Achsenverhältnisse  $r_z/r_c$  im Bereich 0.8 – 0.9 festgestellt [46]. Diese könnten auf Abplattung durch Rotation zurückzuführen sein. Auch neueste Simulationen sprechen für Rotation des ICM mit Geschwindigkeiten in der Größenordnung von 500 – 1000 km/s [18].

Die geschilderten Zusammenhänge sind bisher noch nicht ausreichend untersucht und daher auch schwer quantifizierbar. Es soll hier kein Modell eines rotierenden Galaxienhaufens abgeleitet werden, da die dazu erforderlichen theoretischen Überlegungen nicht Gegenstand dieser Arbeit sind. Daher wird zur Vereinfachung zunächst von starrer Rotation ausgegangen. Die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  wird so festgelegt, daß die Rotationsgeschwindigkeit am Kernradius  $r_c$  des Galaxienhaufens in der Größenordnung von 500 – 1000 km/s liegt, also etwa im Bereich der beobachteten Geschwindigkeitsdispersion.

Zu Beginn dieses Kapitels wird ein Ansatz zur Berechnung von kinetischen Signaturen beliebiger Strömungen des ICM angegeben. Um eine Vorstellung von den zu erwartenden Effekten zu bekommen, wird zunächst auf eine von der Seite betrachtete rotierende Elektronenscheibe eingegangen. Durch die Überlagerung von Translations- und Rotationsbewegung ergibt sich bei der Elektronenscheibe eine Verschiebung des Maximums der kinetischen Signatur. Dies legt die Vermutung nahe, daß ein ähnlicher Effekt bei einem rotierenden Galaxienhaufen auftreten könnte. Im darauf folgenden Abschnitt wird daher die kinetische Signatur eines starr rotierenden Galaxienhaufens untersucht. Im letzten Abschnitt wird das Rotationsmodell des Galaxienhaufens verbessert. Dabei zeigt sich, daß die Vorhersagen der beiden Modelle gut übereinstimmen.

## 6.1 Kinetische Signaturen

Betrachtet man eine zunächst beliebig strömende Elektronenwolke, so ist der Betrag zur relativen Intensitätsänderung von einem Volumenelement der optischen Tiefe  $d\tau$  durch

$$d\left(\frac{\Delta I_\nu}{I_\nu}\right) = G_\nu \beta_{\parallel} d\tau$$

gegeben. Die spektrale Abhängigkeit wird durch  $G_\nu = \frac{x e^x}{e^x - 1}$  mit  $x = \frac{h\nu}{k_B T_0}$  beschrieben. Da  $\frac{\Delta I_\nu}{I_\nu}$  eine Lorentzinvariante ist, kann man zur Berechnung der gesamten relativen Intensitätsänderung über die Einzelbeiträge entlang der Sichtlinie integrieren. Hierbei muß man aber berücksichtigen, daß die Geschwindigkeit im allgemeinen ortsabhängig ist. Mit  $d\tau = \sigma_T n_e dl$  erhält man das Integral

$$\frac{\Delta I_\nu}{I_\nu} = \sigma_T G_\nu \int \beta_{\parallel} n_e dl. \quad (6.1)$$

Sind die Geschwindigkeitsverteilung  $\beta_{\parallel}(l)$  und die Dichte  $n_e(l)$  der Elektronen innerhalb der betrachteten Wolke bekannt, so kann man mit dieser Gleichung die aus der Strömung folgende relative Intensitätsänderung berechnen.

Betrachtet man eine ausgedehnte Elektronenwolke, so kann es unter Umständen sein, daß sich Teile dieser vom Beobachter weg und andere auf ihn zu bewegen. Je nach Geschwindigkeitsfeld kann dies zu einem De- bzw. Inkrement der Intensität des CMB führen. Betrachtet man eine rotierende Elektronenkonstellationen, so erwartet man den größten Effekt bei einer Betrachtung von der Seite<sup>1</sup> und keinen Effekt bei einer Betrachtung entlang der Rotationsachse.

## 6.2 Rotierende Elektronenscheibe

Für eine Abschätzung der zu erwartenden Effekte durch Rotation soll hier eine dünne, starr rotierende Elektronenscheibe als einfaches Modell zur Berechnung der kinetischen Signatur verwendet werden.

### Elektronenscheibe von der Seite

Gegeben sei eine mit der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}$  starr um ihr Zentrum rotierende Elektronenscheibe mit Radius  $R$  und konstanter Dichte  $n_{e0}$ . Die Scheibe liege in der  $x, y$ -Ebene und  $\boldsymbol{\omega}$  stehe senkrecht auf dieser. Die Sichtlinie verlaufe entlang der  $x$ -Achse (vgl. Abb.6.1). Die Rotationsgeschwindigkeit ergibt sich als Kreuzprodukt:

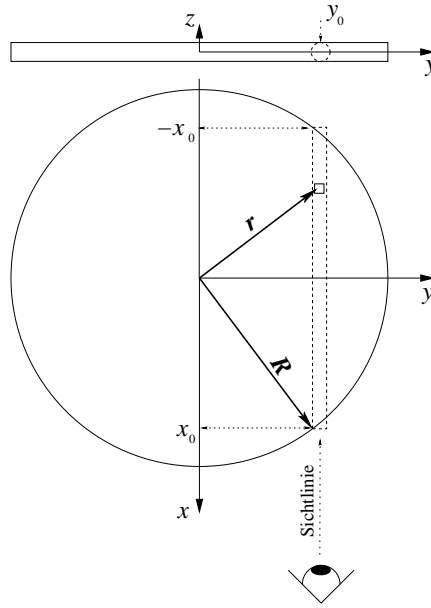
$$\boldsymbol{v}_{\text{Rot}} = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{r} = \begin{pmatrix} -y\omega \\ x\omega \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Für die Integration ist die zur Sichtlinie parallele Geschwindigkeitskomponente  $v_{\parallel} = -y\omega$  konstant. Nach Gleichung (6.1) braucht man also nur die Länge des Weges durch die Scheibe zu bestimmen, welche durch

$$L = 2x_0 = 2R\sqrt{1 - \frac{y_0^2}{R^2}}$$

<sup>1</sup>Die Rotationsachse steht senkrecht zur Sichtlinie.





**Abbildung 6.1:** Geometrie der starr rotierenden Elektronenscheibe

gegeben ist. Damit erhält man für die relative Intensitätsänderung des CMB durch die Streuung an einer starr rotierenden Elektronenscheibe

$$\left(\frac{\Delta I_\nu}{I_\nu}\right)_{\text{Rot}} = -\tau_c \beta_{c,\text{Rot}} G_\nu \frac{y_0}{R} \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{R^2}}, \quad (6.2)$$

mit den Definitionen  $\tau_c = 2\sigma_T n_{e0} R$  und  $\beta_{c,\text{Rot}} = \frac{R\omega}{c}$ .

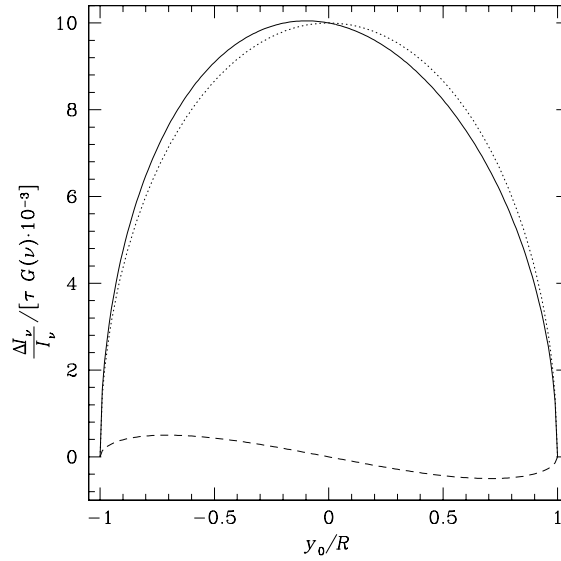
Geht man nun zusätzlich von einer globalen Bewegung der Scheibe aus, so kann man den k-SZE für dieses einfache Beispiel als

$$\left(\frac{\Delta I_\nu}{I_\nu}\right)_{\text{k-SZE}} = \tau_c \beta_{c,\text{Tr}} G_\nu \sqrt{1 - \frac{y_0^2}{R^2}} \quad (6.3)$$

schreiben, wobei  $\beta_{c,\text{Tr}} = \frac{v_{\text{Tr}}}{c}$  die zur Sichtlinie parallele Translationsgeschwindigkeit ist.

Die relative Intensitätsänderung nach (6.2) und (6.3) ist in Abbildung 6.2 dargestellt. Hierbei wurde ein für Galaxienhaufen typischer Wert der Geschwindigkeit  $\beta_{c,\text{Tr}}$  von 0.01 angenommen. Für die Rotationsgeschwindigkeit  $v_{c,\text{Rot}}$  im Abstand  $R$  wurde ein für die Rotationsgeschwindigkeit von Spiralgalaxien typischer Wert von 300 km/s verwendet, was einem  $\beta_{c,\text{Rot}}$  von 0.001 entspricht. Wie sich zeigt, verschiebt sich das maximale Inkrement des k-SZE durch die Überlagerung mit dem kinetischen Effekt durch die Rotation. Dieses liegt nicht mehr im Zentrum der Scheibe, also nicht mehr dort, wo die optische Tiefe am größten ist. Die Größe der Verschiebung ist für  $\eta = \frac{\beta_{c,\text{Rot}}}{\beta_{c,\text{Tr}}} \ll 1$  proportional zu  $\eta$ . Wegen der verhältnismäßig kleinen Rotationsgeschwindigkeit ( $\beta_{c,\text{Rot}} = \frac{1}{10}\beta_{c,\text{Tr}}$ ), wird der Wert des Maximums nicht beeinflusst.

Es wurden hier nur der k-SZE infolge der Translation und der Rotation betrachtet. Bei Galaxienhaufen liefert vor allem der th-SZE eine ortsabhängige Störung des CMB, die in weiten Bereichen den k-SZE dominiert (vgl. Kapitel 3). Eine Überlagerung des th-SZE und des k-SZE durch Rotation bei Galaxienhaufen könnte daher schon für kleine Rotationsgeschwindigkeiten ebenfalls zu einer Verschiebung des maximalen Temperaturdekrementes führen. Diese Möglichkeit wird im nächsten Abschnitt genauer untersucht.



**Abbildung 6.2:** Kinetische Signaturen einer von der Seite betrachteten Elektronenscheibe entlang der Scheibenebene: Dargestellt sind der k-SZE für  $\beta_{c,Tr} = 0.01$  (gepunktet), der kinetische Effekt durch Rotation für  $\beta_{c,Rot} = 0.001$  (gestrichelt) und die Überlagerung beider Effekte (durchgezogen). Man erkennt eine Verschiebung des Maximums des relativen Intensitätsinkrements.

### 6.3 Rotierender Galaxienhaufen

Hier wird ein einfaches Modell eines rotierenden Galaxienhaufens zur Berechnung der kinetischen Signatur infolge der Rotation benutzt. Durch Überlagerung mit dem th-SZE erhält man eine Verschiebung des maximalen Dekrements, welche anschließend genauer untersucht wird.

#### Dichte-Modell

Für das Dichteprofil der Elektronen im Galaxienhaufen kann in erster Näherung von einem isothermen  $\beta$ -Modell nach Gleichung (3.25) ausgegangen werden. Da bei Rotation des ICM eine sphärische Verteilung der Elektronen im Haufen fraglich ist, muß diese leicht verändert werden. Als einfachste Modifikation bietet sich eine Abplattung längs der Rotationsachse an. Die Fläche, auf welcher die Elektronendichte auf die Hälfte des zentralen Wertes abgefallen ist, stellt ein Rotationsellipsoid dar, welches im Hauptachsensystem  $S'$  durch die Gleichung

$$\frac{x'^2 + y'^2}{r_c^2} + \frac{z'^2}{r_z^2} = 1 \quad (6.4)$$

beschrieben wird.  $r_c$  ist der Kernradius des Galaxienhaufens. Die Rotation soll in  $S'$  mit der Winkelgeschwindigkeit  $\boldsymbol{\omega}' = (0, 0, \omega)$  um die  $z'$ -Achse stattfinden (vgl. Abb.6.3).

Definiert man die Parameter  $\iota = r_c/r_z$  und  $\gamma = 3\beta/2$ , so läßt sich das Dichteprofil des rotierenden Galaxienhaufens im Hauptachsensystem in der Form

$$n_e(\mathbf{r}') = n_{e0} \left( 1 + \frac{x'^2 + y'^2 + \iota^2 z'^2}{r_c^2} \right)^{-\gamma} \quad (6.5)$$

schreiben, wobei  $n_{e0}$  die zentrale Elektronendichte des Haufens ist. Die Gleichung (6.5) leuchtet leicht ein: Entlang der  $z'$ -Achse soll die Dichte bei  $\mathbf{r}' = (0, 0, r_z)$  auf den gleichen Wert abgefallen sein wie bei  $\mathbf{r}' = (r_c, 0, 0)$ .

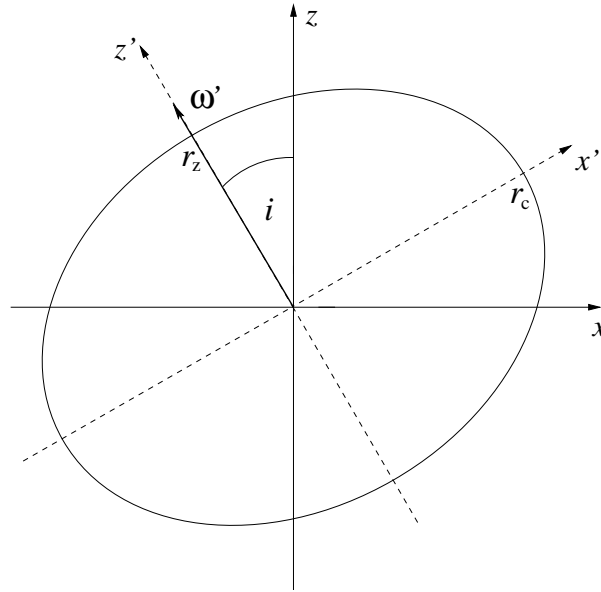


Abbildung 6.3: Rotationsellipsoid

Nun wird der Fall beliebiger Inklination  $i$  betrachtet. Dazu legt man das Beobachtungssystem  $S$  wie folgt fest: Die Sichtlinie verlaufe entlang der  $z$ -Achse. Die  $y$ -Achse wählt man so, daß die Winkelgeschwindigkeit  $\omega$  in der  $x, z$ -Ebene liegt. Den Vektor  $\mathbf{r}'$  erhält man durch Drehung des Vektors  $\mathbf{r}$  um die  $y$ -Achse. Setzt man diesen in (6.5) ein, so führt dies auf

$$n_e(\mathbf{r}) = n_{e0} \left( 1 + \frac{(C_i^2 + \iota^2 S_i^2)x^2 + y^2}{r_c^2} + \frac{(S_i^2 + \iota^2 C_i^2)z^2 - 2(C_i S_i(\iota^2 - 1))xz}{r_c^2} \right)^{-\gamma}, \quad (6.6)$$

mit den Abkürzungen  $S_i = \sin i$  und  $C_i = \cos i$ . Der Abfall der Elektronendichte ist für  $\gamma > 1/2$  im Limes stärker als  $1/r$ . Im folgendem wird nur  $\gamma > 1/2$  zugelassen. Damit kann man von einer infiniten Elektronenverteilung ausgehen. Bei der obigen Wahl der Koordinaten ist die Integration entlang der Sichtlinie über  $z$  von  $-\infty$  bis  $\infty$  durchzuführen. Dieser Umstand vereinfacht die weitere Rechnung sehr.

## Rotationsprofil

Die Rotationsgeschwindigkeit ist bei starrer Rotation in  $S$  durch

$$\mathbf{v}_{\text{Rot}} = \mathbf{v}_{\perp} + \mathbf{v}_{\parallel} = \begin{pmatrix} -y\omega \cos i \\ x\omega \cos i + z\omega \sin i \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -y\omega \sin i \end{pmatrix} \quad (6.7)$$

gegeben. Bezüglich der Integration ist  $\beta_{\parallel} = -\frac{y\omega}{c} \sin i$  konstant und kann somit vor das Integral (6.1) gezogen werden. Für die Berechnung der kinetischen Signatur muß nur noch über die Elektronendichte integriert werden. Hier kommt es aber zu einem Problem: Die Projektion von  $\mathbf{v}_{\text{Rot}}$  auf die Sichtlinie bleibt zwar konstant, aber der Absolutbetrag übersteigt ab einem bestimmten  $z$  die Lichtgeschwindigkeit  $c$ . Da jedoch die Elektronendichte nach außen hin stark abfällt, werden die Beiträge sehr großer Geschwindigkeiten unterdrückt. Man kann daher davon ausgehen, mit dem Modell starrer Rotation eine gute Abschätzung der Effekte zu bekommen.

Da auch  $\mathbf{v}_{\parallel}$  für zunehmendes  $y$  linear ansteigt, wird der Gültigkeitsbereich des Modells in der  $x, y$ -Ebene auf  $|x|, |y| \leq r_c$  eingeschränkt. Weiter außerhalb übersteigt  $\mathbf{v}_{\parallel}$  die Virialgeschwindigkeit

$$\mathbf{v}_{\text{vir}} = \sqrt{\frac{GM}{R}}, \quad (6.8)$$

welche für große Galaxienhaufen ( $M = 2 \cdot 10^{15} M_{\odot}$ ,  $R = 2 \text{ Mpc}$ ) einen Wert von 2000 km/s hat. Dies würde die Stabilität des Haufens in Frage stellen.

Im letzten Abschnitt dieses Kapitels werden die Ergebnisse der Rechnung nach diesem einfachen Modell des starr rotierenden Galaxienhaufens mit denen eines modifizierten Rotationsprofils, welches die unphysikalischen Beiträge der starren Rotation vermeidet, verglichen. Wie sich dabei zeigt, ergibt die folgende einfache Rechnung eine gute Abschätzung der Effekte und liefert zudem eine analytische Lösung des Problems.

### Berechnung des k-SZE infolge der Rotation

Mit dem oben beschriebenen Modell des rotierenden Galaxienhaufens vereinfacht sich die Berechnung der spektralen Störung des CMB nach Gleichung (6.1) auf eine Integration über die Elektronendichte (6.6). Zur weiteren Vereinfachung werden die Abkürzungen

$$a^2 = \frac{(C_i^2 + \iota^2 S_i^2)x^2 + y^2}{r_c^2} \quad (6.9a)$$

$$b^2 = \frac{(S_i^2 + \iota^2 C_i^2)}{r_c^2} \quad (6.9b)$$

$$d = \frac{C_i S_i (\iota^2 - 1)x}{r_c} \quad (6.9c)$$

definiert, welche alle bezüglich der Integration konstant sind. Hiermit läßt sich (6.6) zu

$$n_e(\mathbf{r}) = n_{e0} \left( 1 + a^2 - \left( \frac{d}{b} \right)^2 + \left( bz - \frac{d}{b} \right)^2 \right)^{-\gamma} \quad (6.10)$$

umschreiben. Das Integral entlang der Sichtlinie kann mit den Substitutionen

$$A^2 = 1 + a^2 - \left( \frac{d}{b} \right)^2 \quad (6.11a)$$

$$\xi = bz - \frac{d}{b}, \quad (6.11b)$$

in die Form

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} n_e dz = \frac{n_{e0}}{b} \int_{-\infty}^{\infty} (A^2 + \xi^2)^{-\gamma} d\xi \quad (6.12)$$

gebracht werden. Es hat somit den Wert

$$I_1 = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\gamma - \frac{1}{2})}{\Gamma(\gamma)} \frac{n_{e0}}{b} (A^2)^{\frac{1}{2}-\gamma}. \quad (6.13)$$

Die  $\Gamma$ -Funktion ist im Anhang A.1 erläutert. Die Berechnung von  $A^2$  führt w.m.l.s. auf das einfache Ergebnis

$$A^2 = 1 + \frac{\iota^2}{S_i^2 + \iota^2 C_i^2} \frac{x^2}{r_c^2} + \frac{y^2}{r_c^2}. \quad (6.14)$$

Definiert man nun noch die Konstanten

$$\tau_c = 2\sigma_T n_{e0} r_c \quad (6.15a)$$

$$\beta_c = \frac{\omega r_c}{c} \quad (6.15b)$$

$$\kappa = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma(\gamma - \frac{1}{2})}{\Gamma(\gamma)}, \quad (6.15c)$$

und resubstituiert, so ergibt sich für die relative Intensitätsänderung der CMBR auf Grund von starrer Rotation des Elektronenmediums

$$\left( \frac{\Delta I_\nu}{I_\nu} \right)_{\text{Rot}} = -\frac{1}{2} \kappa \tau_c \beta_c G_\nu \cdot \frac{y}{r_c} \cdot \frac{S_i}{\sqrt{S_i^2 + \iota^2 C_i^2}} \left( 1 + \frac{\iota^2}{S_i^2 + \iota^2 C_i^2} \frac{x^2}{r_c^2} + \frac{y^2}{r_c^2} \right)^{\frac{1}{2}-\gamma} \quad (6.16)$$

Betrachtet man den Galaxienhaufen unter einer Inklination von  $i = 0$ , also entlang der Rotationsachse, so bekommt man nach Gleichung (6.16) keine kinetische Signatur. Das entspricht den Erwartungen, da in diesem Fall alle Geschwindigkeiten in der Himmelsebene liegen. Der Fall  $i = \pi/2$  liefert, wie erwartet, einen maximalen Effekt.

In Abbildung 6.4 wurde die relative Intensitätsänderung für den Fall  $i = \pi/2$  dargestellt. Für  $\gamma = 1$  (obere Bilder) besitzt das Intensitätsde- bzw. inkrement in großen Abständen vom Zentrum einen Grenzwert. Beispielsweise geht die relative Intensitätsänderung auf der  $y$ -Achse im Limes gegen den konstanten Wert  $\pm \frac{1}{2} \kappa \tau_c \beta_c G_\nu$ , weil die Geschwindigkeit linear mit dem Abstand vom Zentrum zunimmt, während das Dichteintegral für  $\gamma = 1$  im Limes wie  $1/y$  abfällt. Da der Gültigkeitsbereich des Modells auf  $|x|, |y| \leq r_c$  eingeschränkt wurde, spielt dieses Verhalten für die weiteren Betrachtung keine Rolle.

Für die beiden unteren Diagramme von Abbildung 6.4 wurde  $\gamma = 1.5$  benutzt. Der Abfall des Dichteintegrals ist nun stärker als  $1/r$ . Hier sieht man deutlich, daß der Effekt nur auf einen kleinen Bereich in der Nähe des Haufenzentrums beschränkt ist. Ein solch großer Wert von  $\gamma$  wird bei Galaxienhaufen allerdings nicht erreicht. Die typischen Werte liegen im Bereich von  $\gamma = 1$ . Dieser Fall dient nur zur Illustration, da man durch eine Modifikation des Rotationsprofils qualitativ die gleiche Signatur wie nach dem Modell starrer Rotation für  $\gamma = 1.5$  erwartet.

### Überlagerung des k-SZE infolge der Rotation mit dem th-SZE

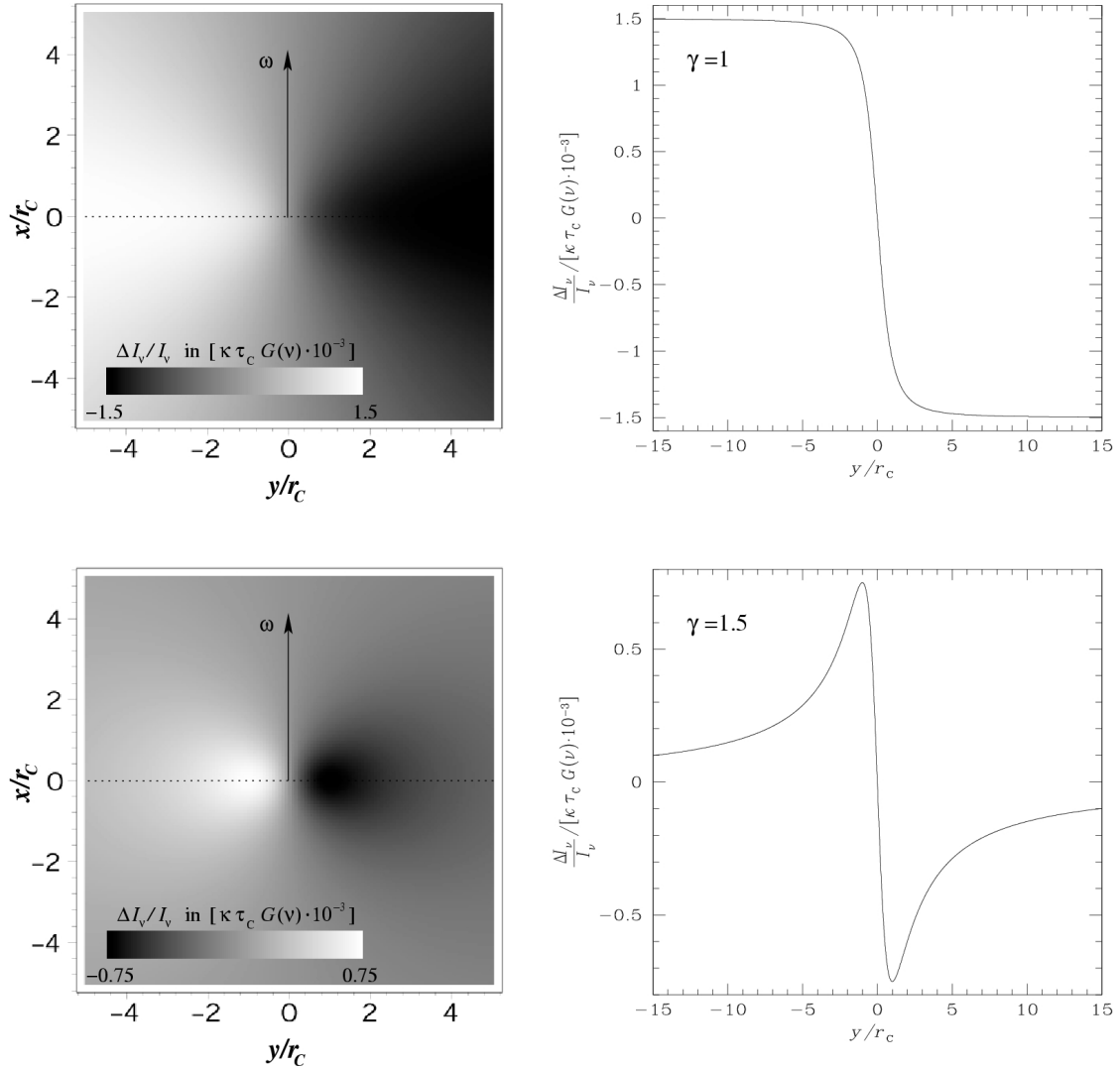
In Kapitel 3 wurde der th-SZE diskutiert. Gleichung (3.6a) gibt das Temperaturdekrement im RJ-Bereich ohne relativistische Korrekturen an. Dabei ist  $y = \int \frac{k_B T_e}{m_e c^2} \sigma_T n_e dl$  der Comptonparameter. Unter Voraussetzung von Isothermalität kann man das Temperaturdekrement als

$$\left( \frac{\Delta T^{\text{RJ}}}{T_0} \right)_{\text{th-SZE}} = -2\sigma_T \frac{k_B T_e}{m_e c^2} \int n_e dl$$

schreiben. Hier taucht ein Integral über die Elektronendichte auf, dessen Lösung für einen elliptischen Galaxienhaufen durch Gleichung (6.13) gegeben ist. Man erhält daraus für das Temperaturdekrement im RJ-Bereich auf Grund des th-SZE

$$\left( \frac{\Delta T^{\text{RJ}}}{T_0} \right)_{\text{th-SZE}} = -\frac{\kappa \tau_c \theta_e}{\sqrt{S_i^2 + \iota^2 C_i^2}} \cdot \left( 1 + \frac{\iota^2}{S_i^2 + \iota^2 C_i^2} \frac{x^2}{r_c^2} + \frac{y^2}{r_c^2} \right)^{\frac{1}{2}-\gamma}, \quad (6.17)$$

mit den Abkürzungen (6.15) und  $\theta_e = \frac{k_B T_e}{m_e c^2}$ .



**Abbildung 6.4:** Relative Intensitätsänderung des CMBR in Richtung eines rotierenden Galaxienhaufens für  $i = \pi/2$ ,  $\iota = 0.8$  und  $\beta_c = 0.003$  nach Gleichung (6.16): Für die beiden oberen Diagramme wurde ein bei Galaxienhaufen typischer Wert von  $\gamma = 1$  angenommen. Die beiden unteren Diagramme wurden für  $\gamma = 1.5$  berechnet. In den linken Diagrammen ist  $\frac{\Delta I_\nu}{I_\nu}$  in der Himmelsebene in Einheiten von  $\tau_c \kappa G_\nu \cdot 10^{-3}$  dargestellt. Helle Bereiche entsprechen einem relativen Intensitätsinkrement, dunkle Bereiche einem Intensitätsdekrement. In den rechten Diagrammen sind die zugehörigen Schnitte entlang der  $y$ -Richtung aufgetragen (links gepunktet markiert).

Das maximale Temperaturdekrement der CMBR liegt im Zentrum des Haufens, wo auch die Dichte der Elektronen am größten ist. Es wird durch

$$\left(\frac{\Delta T_{\max}^{\text{RJ}}}{T_0}\right)_{\text{th-SZE}} = -\frac{\kappa \tau_c \theta_e}{\sqrt{S_i^2 + \iota^2 C_i^2}} \quad (6.18)$$

gegeben und ist von der Inklination  $i$  abhängig.

Für die Summe aus th-SZE und den k-SZE infolge von Rotation nach Gleichung (6.16) ergibt sich im RJ-Limes

$$\boxed{\left(\frac{\Delta T^{\text{RJ}}}{T_0}\right)_{\text{ges}} = -\frac{\kappa \tau_c \theta_e}{\sqrt{S_i^2 + \iota^2 C_i^2}} \cdot \left[1 + \frac{1}{2} \eta S_i \frac{y}{r_c}\right] \cdot \left(1 + \frac{\iota^2}{S_i^2 + \iota^2 C_i^2} \frac{x^2}{r_c^2} + \frac{y^2}{r_c^2}\right)^{\frac{1}{2}-\gamma}}, \quad (6.19)$$

wobei hier der Parameter  $\eta = \frac{\beta_c}{\theta_e}$  definiert wurde.

In Abbildung 6.5 ist das Temperaturdekrement der CMBR in Richtung eines starr rotierenden Galaxienhaufens in der Nähe des Haufenzentrums für verschiedene Inklinationen nach Gleichung (6.19) dargestellt. Die Dichte der Punkte deutet die Stärke des Dekrements an. Zusätzlich sind Konturlinien des Dekrements auf Grund des th-SZE ohne zusätzliche Rotation eingezeichnet, dessen Maximum im Zentrum des jeweiligen Bildes liegt. Man erkennt deutlich eine Verschiebung der Maxima gegeneinander. Die Größenordnung der Verschiebung liegt für  $\gamma = 1$ ,  $\beta_c = 0.003$ ,  $k_B T_e = 10 \text{ keV}$  und  $S_i = 1$  bei  $\Delta y_{\max} \approx 0.08 r_c$ . Für typische Kernradien von  $30''$  bedeutet dies eine Verschiebung um  $2.4''$ .

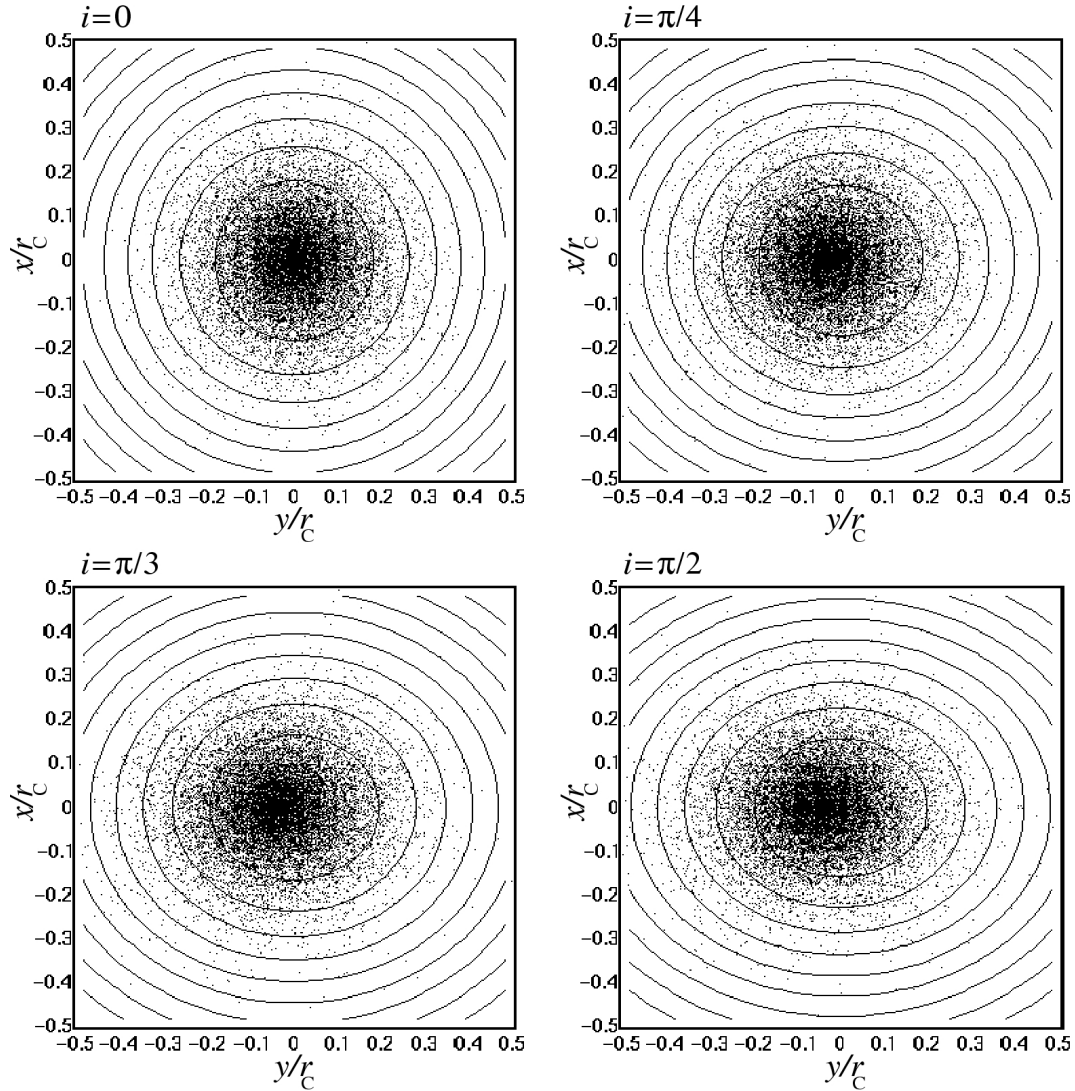
Im Radiobereich erreicht man heute Winkelauflösungen  $< 1''$ . Die Röntgensatelliten **XMM-Newton** und **Chandra** haben eine Winkelauflösungen im Bereich von  $\sim 1''$ . Geht man davon aus, daß die Röntgenemission des heißen Elektronengases nicht von der Rotation des Galaxienhaufens beeinflusst wird, so sollte durch Vergleich mit Radiodaten diese Verschiebung bestimmbar sein. Dies wäre ein direkter Hinweis auf eine Rotation des untersuchten Haufens.

Wie in Kapitel 7 noch gezeigt wird, ergibt sich durch die Rotation des Galaxienhaufens zusätzlich eine Polarisationsignatur, welche die Ergebnisse einer Verschiebungsmessung untermauern sollte.

Betrachtet man Schnitte entlang der  $y$ -Achse (vgl. Abb.6.6), so erkennt man ein Steigen des Maximums mit zunehmenden  $i$ . Dies ist hauptsächlich auf den Projektionseffekt zurückzuführen. Durch die Rotation des Galaxienhaufens wird der Wert des Maximums nicht wesentlich beeinflusst. Dies kann man an der Differenz zwischen dem maximalen Temperaturdekrement durch den th-SZE mit Rotation nach Gleichung (6.19) und dem maximalen Dekrement durch den th-SZE ohne zusätzliche Rotation nach Gleichung (6.18) sehen. Diese Differenz sei definiert als

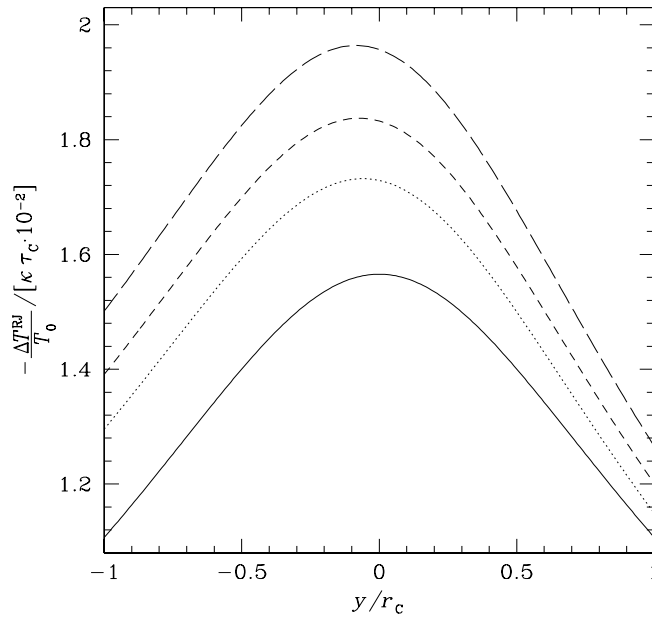
$$\Delta\Delta = \left(\frac{\Delta T^{\text{RJ}}}{T_0}\right)_{\text{ges}} \Big|_{y=y_{\max}} - \left(\frac{\Delta T_{\max}^{\text{RJ}}}{T_0}\right)_{\text{th-SZE}}. \quad (6.20)$$

In Abbildung 6.7 wurde  $\Delta\Delta$  für eine Inklination von  $i = \pi/2$  dargestellt. Es wurde dazu schon  $y_{\max} \approx \frac{\eta S_i}{2(2\gamma-1)} r_c$  nach der erst weiter unter abgeleiteten Gleichung (6.23) verwendet. Der Betrag von  $\Delta\Delta$  liegt in der Größenordnung von  $\kappa \tau_c \cdot 10^{-4}$  und ist damit um einen Faktor 100 kleiner als das Temperaturdekrement durch den th-SZE. Daher hat die Rotation des Haufens keine wesentlichen Auswirkungen auf den Gesamtbetrag des Dekrements. Die Rotation des Elektronenmediums bewirkt nur eine Verschiebung des maximalen Dekrements aus dem Zentrum des Galaxienhaufens, d.h. dem Ort in der Himmelsebene, wo die optische Tiefe  $\tau$  am größten ist.

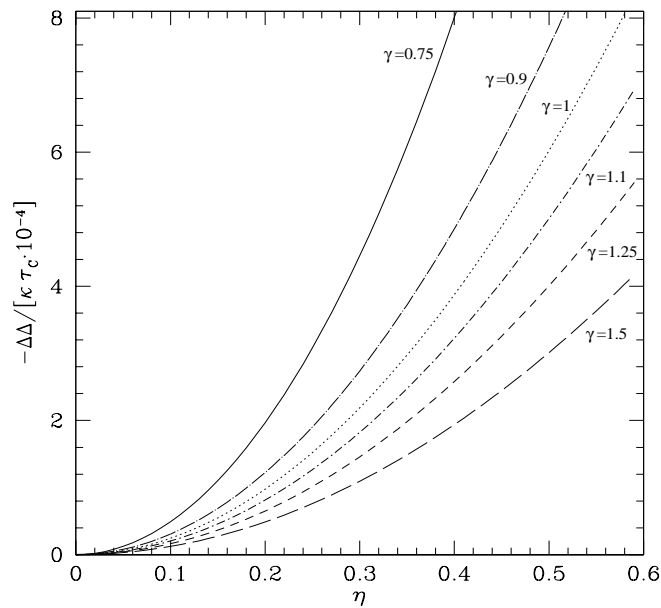


**Abbildung 6.5:** Temperaturdekrement in Richtung eines starr rotierenden Galaxienhaufens für verschiedene Inklinationen  $i$  nach Gleichung (6.19): Alle Berechnungen wurden mit  $\iota^{-1} = 0.8$ ,  $\theta_e = 10/511$ ,  $\eta = 0.17$  und  $\gamma = 1$  durchgeführt. Die Dichte der Punkte deutet die Stärke des Temperaturdekrements an. Der Wert des maximalen Dekrements liegt in der Größenordnung  $\frac{\Delta T_{\text{RJ}}}{T_0} = -1.5\kappa\tau_c \cdot 10^{-2}$ . Schnitte entlang der  $y$ -Achse sind in Abbildung 6.6 aufgetragen. Zusätzlich wurden die Konturlinien des Temperaturdekrements auf Grund des th-SZE ohne eine zusätzliche Rotation eingezeichnet. Dessen Maximum liegt im Zentrum des jeweiligen Diagramms. Man erkennt deutlich eine Verschiebung der Maxima gegeneinander.





**Abbildung 6.6:** Schnitte durch das Zentrum eines starr rotierenden Galaxienhaufens entlang der  $y$ -Achse für verschiedene Inklination  $i$  nach Gleichung (6.19): Alle Berechnungen wurden mit  $\iota^{-1} = 0.8$ ,  $\theta_e = 10/511$ ,  $\eta = 0.17$  und  $\gamma = 1$  durchgeführt. Die Kurven entsprechen von unten nach oben:  $i = 0, \pi/4, \pi/3$  und  $\pi/2$ . Der Wert des maximalen Temperaturdekrement steigt für zunehmendes  $i$  an. Dies ist auf den Projektionseffekt zurückzuführen. Die Verschiebung des Maximums ist deutlich erkennbar.



**Abbildung 6.7:** Differenz zwischen dem maximalen Temperaturdekrement auf Grund des th-SZE mit und ohne zusätzliche Rotation für verschiedene Werte von  $\gamma$  unter einer Inklination von  $i = \pi/2$ : Alle Rechnungen wurden mit  $\theta_e = 10/511$  durchgeführt. Das zusätzliche Dekrement durch die Rotation ist um zwei Größenordnungen kleiner als das des th-SZE. Die Rotation des Galaxienhaufens hat deshalb keinen wesentlichen Einfluß auf die Bestimmung der Hubble-Konstanten mit Hilfe des th-SZE.

### Verschiebung des maximalen Dekrements

Es soll nun geklärt werden, wie groß die Verschiebung des maximalen Temperaturdekrements ist und in welche Richtung sie geht. Auf Grund der Symmetrie von (6.19) zur  $y$ -Achse gibt es keine Verschiebung in  $x$ -Richtung. Um die Verschiebung des Temperaturdekrements senkrecht zur Rotationsachse zu bestimmen, leitet man (6.19) partiell nach  $y$  ab. Aus den Nullstellen der Ableitung erhält man die Extrema des Temperaturdekrements. Dabei müssen folgende Fälle unterschieden werden:

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \eta S_i = 0 \quad \wedge \quad \gamma > \frac{1}{2} & \quad \rightarrow \quad y_{\max} = 0 \\ \text{(ii)} \quad \eta S_i \neq 0 \quad \wedge \quad \gamma = 1 & \quad \rightarrow \quad y_{\max} = \frac{\eta S_i}{2} r_c \end{aligned}$$

Schließt man  $\eta S_i = 0 \wedge \gamma = 1$  aus so ergibt sich die quadratische Gleichung

$$\xi^2 + \frac{2\gamma - 1}{\eta S_i(\gamma - 1)} \xi - \frac{1}{2(\gamma - 1)} = 0,$$

mit  $\xi = \frac{y}{r_c}$ . Aus dieser folgen ein Maximum bei

$$\xi_{\max} = -\frac{(2\gamma - 1)}{2\eta S_i(\gamma - 1)} \left[ 1 - \sqrt{1 + \frac{2\eta^2 S_i^2(\gamma - 1)}{(2\gamma - 1)^2}} \right] \quad (6.21)$$

und ein Minimum in großem Abstand vom Zentrum, welches hier aber nicht weiter behandelt werden soll. Für  $\gamma < 1$  kann die Wurzel in (6.21) negativ werden. Daher muß man für den  $y$ -Wert des maximalen Temperaturdekrements zwei weitere Fälle unterscheiden:

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \eta S_i \neq 0 \quad \wedge \quad \frac{1}{2} < \gamma < 1 & \quad \rightarrow \quad y_{\max} = \xi_{\max} r_c \quad \text{mit} \quad |\eta S_i| \leq \frac{2\gamma - 1}{\sqrt{2|\gamma - 1|}} \\ \text{(iv)} \quad \eta S_i \neq 0 \quad \wedge \quad 1 < \gamma & \quad \rightarrow \quad y_{\max} = \xi_{\max} r_c \end{aligned}$$

Die Fälle (iii) und (iv) gehen beide stetig für  $\gamma \rightarrow 1$  in den Fall (ii) über. Der Fall (iii) läßt sich außerdem für  $\eta S_i \rightarrow 0$  stetig durch 0 ergänzen. Man kann also (i)-(iv) zusammenfassend als

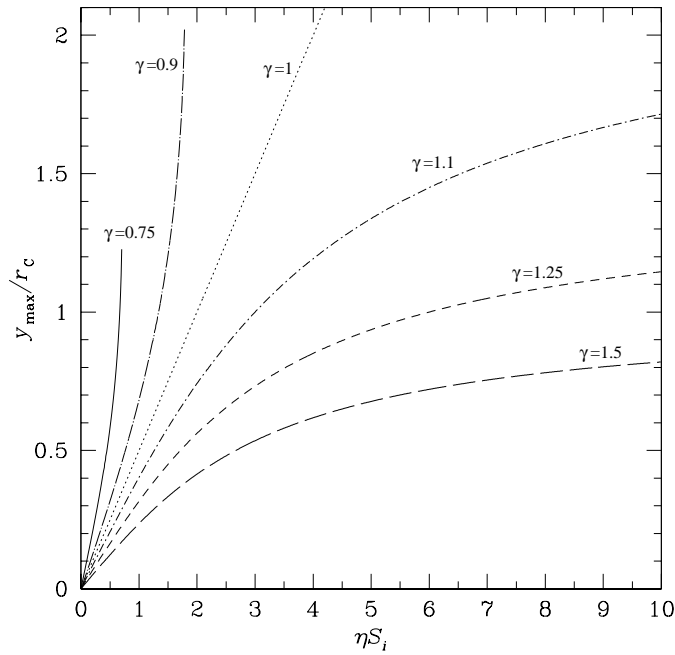
$$y_{\max} = \begin{cases} \xi_{\max} r_c & \text{für} \quad |\eta S_i| \leq \frac{2\gamma - 1}{\sqrt{2|\gamma - 1|}} \quad \wedge \quad \frac{1}{2} < \gamma \leq 1 \\ \xi_{\max} r_c & \text{für} \quad 1 < \gamma \end{cases} \quad (6.22)$$

schreiben. Die Verschiebung hängt nicht von  $\iota$  ab.

In Abbildung 6.8 ist  $y_{\max}$  für verschiedene Werte von  $\gamma$  dargestellt. Man erkennt, daß für kleines  $\eta S_i$  alle Kurven linear verlaufen. Bei großen Werten von  $\eta S_i$  sind die Verschiebungen für  $\gamma > 1$  nach oben beschränkt. Man kann daher für (6.22) die Näherungsformeln

$$y_{\max} \approx \begin{cases} \frac{\eta S_i}{2(2\gamma - 1)} r_c & \text{für} \quad |\eta S_i| \ll \frac{2\gamma - 1}{\sqrt{2|\gamma - 1|}} \quad \wedge \quad \frac{1}{2} < \gamma \\ \frac{1}{\sqrt{2(\gamma - 1)}} r_c & \text{für} \quad |\eta S_i| \gg \frac{2\gamma - 1}{\sqrt{2(\gamma - 1)}} \quad \wedge \quad 1 < \gamma \end{cases} \quad (6.23)$$

aufstellen. Hier sollte man anmerken, daß für Galaxienhaufen physikalisch nur der Bereich  $|\eta| \leq 1$  Sinn macht: Wäre z.B.  $\eta = 10$ , so würde mit einem typischen  $k_B T_e = 10$  keV eine Rotationsgeschwindigkeit am Kernradius von  $v_c \approx 0.2c$  folgen. Diese ist viel größer als die typische Virialgeschwindigkeit von Galaxienhaufen, welche im Bereich von 1000 km/s liegt. Ein solcher Haufen kann nicht stabil bleiben.



**Abbildung 6.8:** Verschiebung des maximalen Temperaturdekrementes bei der Überlagerung des th-SZE mit den k-SZE durch Rotation für verschiedene Werte von  $\gamma$ . Es besteht keine Abhängigkeit von der Abplattung  $\iota^{-1}$ .

## 6.4 Modifiziertes Rotationsprofil

Für die Rechnungen in Abschnitt 6.3 wurde von starrer Rotation ausgegangen. Mit dieser Vereinfachung ließ sich die spektrale Störung des CMB analytisch berechnen. Wie schon erwähnt wurde, ist dieses Modell physikalisch für  $r \gg r_c$  nicht unbedenklich. Wie man das Rotationsprofil abändern sollte, und welche Abweichungen sich daraus zu der bisherigen Rechnung ergeben, wird in diesem Abschnitt diskutiert. Die Abänderungen erfolgen dabei aus rein heuristischen Überlegungen.

### Modifikation des Rotationsprofils

Das typische Rotationsprofil von Spiralgalaxien hat qualitativ folgenden Verlauf: Zunächst steigt die Rotationsgeschwindigkeit von Zentrum bis zu einem bestimmten Radius  $R$  etwa linear an. Dies ist auf die kugelförmige Struktur des massereichen Zentralgebiets der meisten Spiralgalaxien zurückzuführen. Ist der Abstand zum Zentrum größer als  $R$ , so bleibt die Rotationsgeschwindigkeit weitgehend konstant oder fällt leicht nach außen hin ab. Dies erklärt man durch das Vorhandensein eines Halos aus dunkler, nichtleuchtender Materie, welcher die Galaxie kugelförmig umgibt.

Diese Beobachtungstatsachen lassen sich auf Galaxienhaufen übertragen: Wie sich aus Beobachtungen zeigt, besitzen Galaxienhaufen ebenfalls eine massereiche, kugelförmige Zentralregion. Deshalb liegt es nahe, auch hier bis zu einem bestimmten Radius  $R$  von einer linear mit dem Abstand steigenden Rotationsgeschwindigkeit auszugehen. Da man bei Galaxienhaufen ebenfalls die Existenz eines Halos aus Dunkelmaterie vermutet, wird für größere Abstände wie bei Spiralgalaxien eine konstante Rotationsgeschwindigkeit angenommen.

Die Frage ist nun, wie groß der Radius  $R$  des Bereichs starrer Rotation ist.<sup>2</sup> Ein Ansatz wäre, daß  $R$  mit dem Kernradius  $r_c$  der Elektronenverteilung identisch ist. Dies ist jedoch nicht unbedingt so, da das heiße Plasma, welches in Galaxienhaufen enthalten ist, weniger als ein Zehntel der Materie des Haufens ausmacht. Der andere Teil ist in einzelnen Galaxien konzentriert bzw. befindet sich im Halo. Da die Verteilung der gravitierenden Masse also nicht zwingend mit der Verteilung des heißen Plasmas, insbesondere der Elektronen, übereinstimmt, wird  $R$  als Parameter offengelassen.

### Berechnung des k-SZE infolge der Rotation mit dem modifizierten Rotationsmodell

Im folgenden wird eine Inklination von  $i = \pi/2$  betrachtet. Die Koordinaten werden wie in Abschnitt 6.3 gewählt. Der Bereich starrer Rotation sei durch das Rotationsellipsoid

$$\epsilon^2 x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \quad (6.24)$$

eingegrenzt, wobei  $R$  der Radius des Kreises ist, welcher aus dem Schnitt des Ellipsoids mit der  $y, z$ -Ebene entsteht.  $\epsilon^{-1}$  ist das Halbachsenverhältnis des Ellipsoids, welches nicht mit  $\iota^{-1}$  übereinstimmen muß. Man kann so z.B. auch die Entartung des Ellipsoids (6.24) zu einem unendlichen Zylinder berücksichtigen ( $\epsilon = 0$ ). Schnitte des Ellipsoids mit Ebenen, die parallel zur  $y, z$ -Ebene liegen, sind Kreise mit dem von  $x$  abhängigen Radius

$$R_x = \begin{cases} \sqrt{R^2 - \epsilon^2 x^2} & \text{für } |\epsilon x| \leq R \\ 0 & \text{für } |\epsilon x| > R. \end{cases} \quad (6.25)$$

Für  $|\epsilon x| > R$  bekommt man keinen Schnitt mit dem Ellipsoid. Der Abstand von der Rotationsachse ist durch

$$\rho = \sqrt{y^2 + z^2} \quad (6.26)$$

gegeben (vgl. Abb.6.9). Mit den obigen Bemerkungen hat der auf  $c$  normierte Geschwindigkeitsvektor die Form

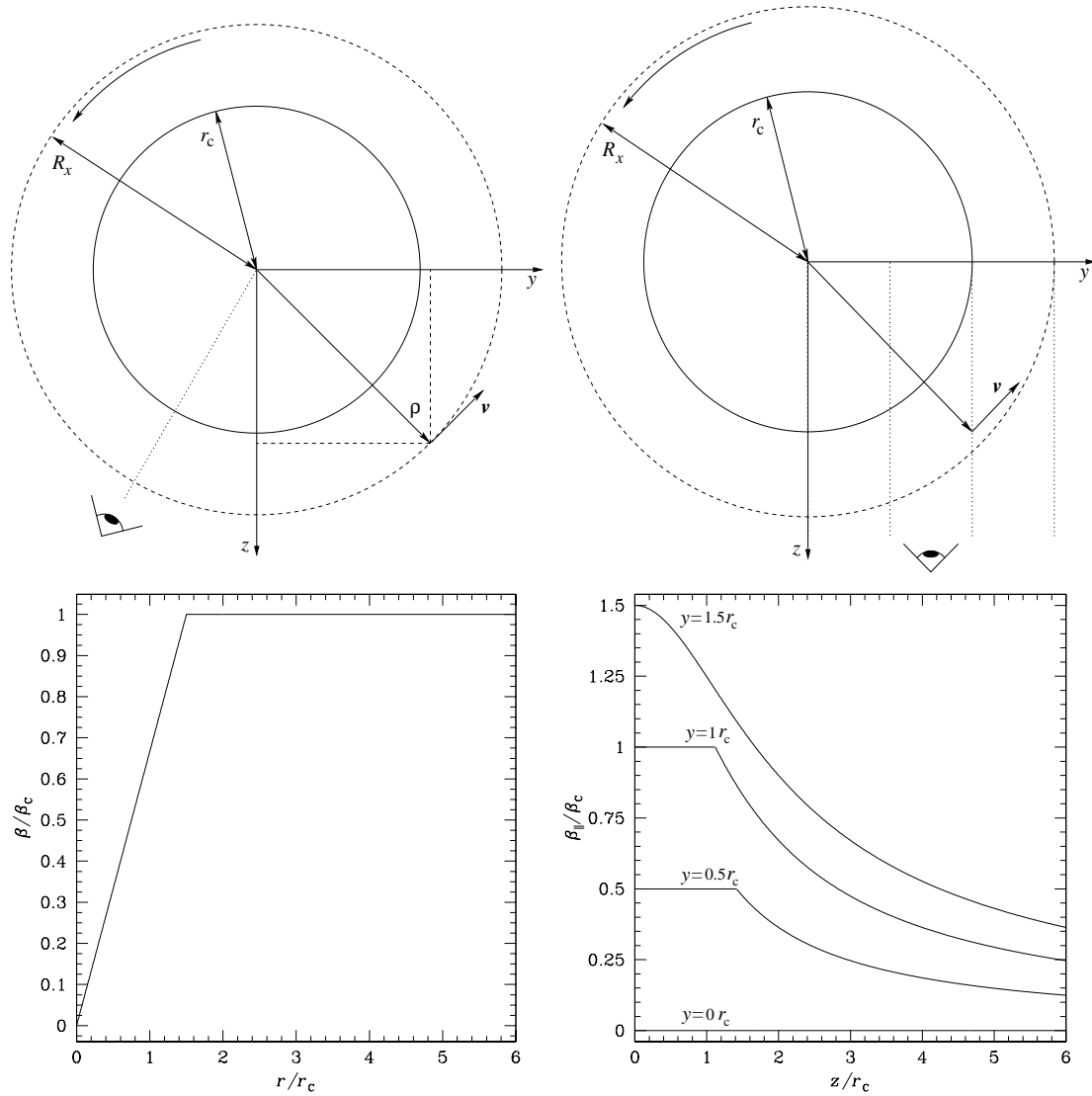
$$\beta_{\text{mod}} = \begin{cases} \beta_c \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{z}{r_c} \\ -\frac{y}{r_c} \end{pmatrix} & \text{für } \rho \leq R_x \\ \beta_R \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{z}{\rho} \\ -\frac{y}{\rho} \end{pmatrix} & \text{für } \rho > R_x, \end{cases} \quad (6.27)$$

mit  $\beta_c = \frac{\omega r_c}{c}$  und  $\beta_R = \beta_c \frac{R_x}{r_c}$ . Die zur Sichtlinie parallele Komponente von  $\beta$  ist damit durch

$$\beta_{\parallel, \text{mod}} = \begin{cases} -\beta_c \frac{y}{r_c} & \text{für } \rho \leq R_x \\ -\beta_c \frac{R_x y}{r_c \rho} & \text{für } \rho > R_x \end{cases} \quad (6.28)$$

gegeben. Wie nach dem Modell reiner starrer Rotation ist die auf die Sichtlinie projizierte Geschwindigkeit für  $\rho \leq R_x$  konstant. Im Limes  $z \rightarrow \infty$  nimmt sie dagegen für  $\rho > R_x$  wie  $1/z$  ab (vgl. Abb.6.9).

<sup>2</sup>Wie sich zeigen wird, hängt die Übereinstimmung der Ergebnisse der beiden Rotationsmodelle direkt von  $R$  ab.



**Abbildung 6.9:** Modifiziertes Rotationsprofil eines Galaxienhaufens für  $R_x = 1.5r_c$ : Die übereinander liegenden Graphen gehören jeweils zusammen. Die in den unteren Diagrammen betrachteten Schnitte durch das Rotationsprofil sind gepunktet in den oberen Skizzen eingezeichnet.

Es soll nun die kinetische Signatur nach dem modifizierten Rotationsprofil mit dem Ergebnis unserer vorherigen Rechnung verglichen werden: Für die Elektronendichte  $n_e$  folgt aus Gleichung (6.6) mit  $i = \pi/2$

$$n_e = n_{e0} \left( 1 + \frac{\epsilon^2 x^2 + y^2}{r_c^2} + \frac{z^2}{r_c^2} \right)^{-\gamma}.$$

Die Ortsabhängigkeiten können in dem Formfaktor  $f_e = n_e/n_{e0}$  zusammengefaßt werden. Definiert man noch die Abkürzungen

$$\chi = \frac{y}{r_c} \quad (6.29a)$$

$$\xi = \frac{z}{r_c} \quad (6.29b)$$

$$\Sigma = \begin{cases} \sqrt{R_x^2 - y^2} & \text{für } |y| \leq R_x \\ 0 & \text{für } |y| > R_x, \end{cases} \quad (6.29c)$$

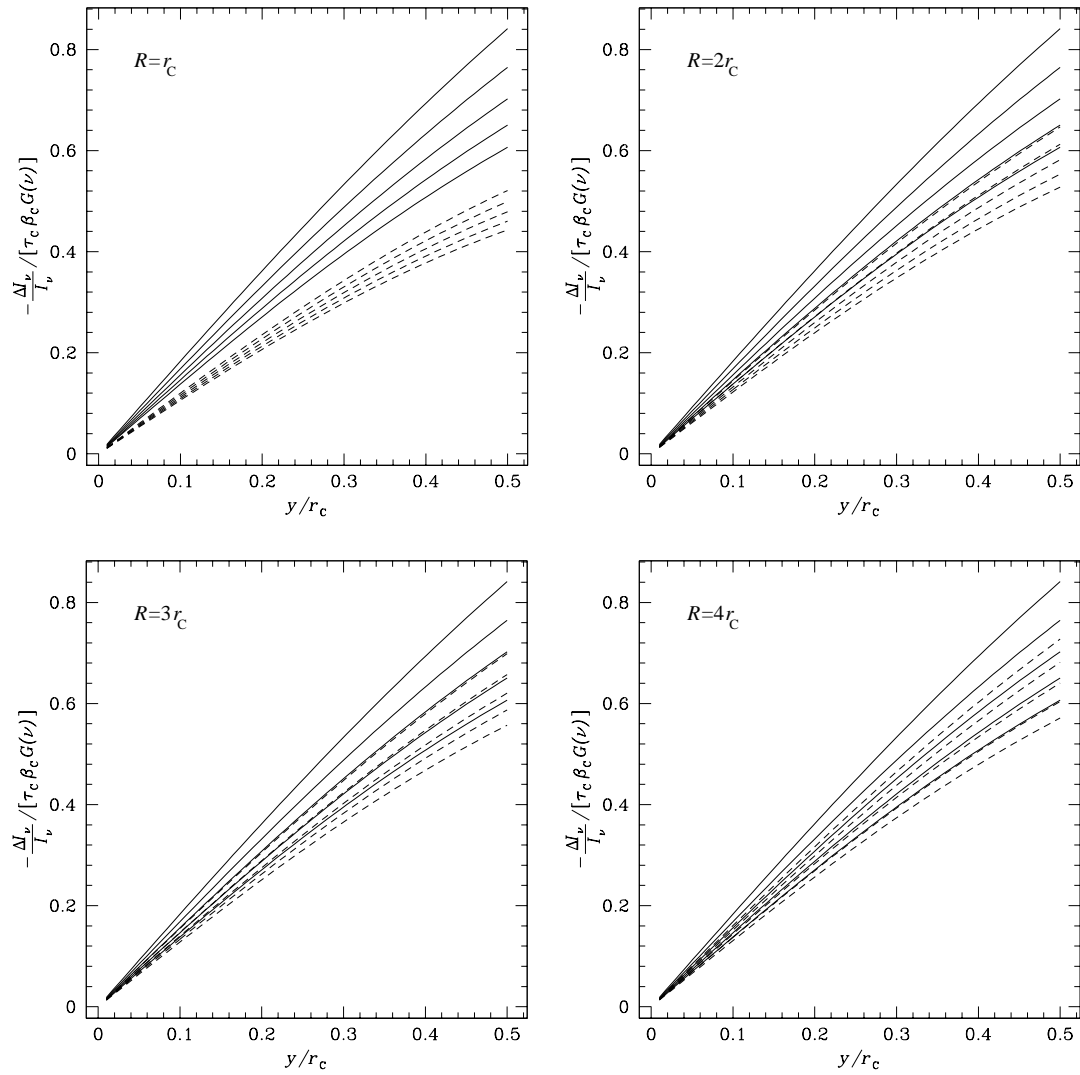
so kann man den Ansatz für die relative Intensitätsänderung nach dem Modell reiner starrer Rotation folgendermaßen aufschreiben:

$$\left( \frac{\Delta I_\nu}{I_\nu} \right)_{\text{Rot}} = -\tau_c \beta_c G_\nu \chi \left[ \int_0^{\Sigma/r_c} f_e d\xi + \int_{\Sigma/r_c}^{\infty} f_e d\xi \right]. \quad (6.30)$$

Der Ansatz für die relative Intensitätsänderung nach dem modifizierten Rotationsmodell ist mit den Abkürzungen (6.29) durch

$$\left( \frac{\Delta I_\nu}{I_\nu} \right)_{\text{Rot,mod}} = -\tau_c \beta_c G_\nu \chi \left[ \int_0^{\Sigma/r_c} f_e d\xi + \frac{R_x}{r_c} \int_{\Sigma/r_c}^{\infty} \frac{f_e}{\sqrt{\chi^2 + \xi^2}} d\xi \right] \quad (6.31)$$

gegeben. Beide Modelle liefern für  $\xi \leq \Sigma/r_c$  die gleichen Beiträge zur relativen Intensitätsänderung. Der Anteil der Integrale für  $\Sigma/r_c \leq \xi$  zur relativen Intensitätsänderung nimmt mit steigendem  $R$  stark ab, was auf die nach außen abfallende Elektronendichte zurückzuführen ist. Dies kann man an Abbildung 6.10 ablesen. Dort sind die numerischen Ergebnisse für die relative Intensitätsänderung nach (6.30) bzw. (6.31) für  $x = 0$  und verschiedene Werte  $\gamma$  aufgetragen. Für größeres  $R$  werden die Unterschiede zwischen den Ergebnissen der Modelle schnell kleiner. Deshalb kann das Modell der starren Rotation als gute Näherung angesehen werden.



**Abbildung 6.10:** Numerische Ergebnisse für die relative Intensitätsänderung der CMBR nach dem modifizierten Rotationsprofil (gestrichelt) im Vergleich zum Modell starrer Rotation (durchgezogen) entlang der  $y$ -Achse ( $x = 0$ ) für eine Inklination von  $i = \pi/2$ .

Der Wert von  $\gamma$  wurde dabei wie folgt variiert: Für das jeweilige Modell steigt  $\gamma$  von 0.9 für die oberste Kurve bis 1.10 für die unterste Kurve in Schritten von 0.05 an.

Zusätzlich wurde bei den verschiedenen Diagrammen die Größe der Zone starrer Rotation  $R$  variiert. Mit zunehmendem  $R$  werden die Unterschiede zwischen den beiden Modellen kleiner: Für  $R = r_c$  unterscheiden sich die Ergebnisse um ca. 30%, wohingegen für  $R = 4r_c$  die Abweichung nur noch etwa 10% beträgt.





# Kapitel 7

## Polarisationssignatur durch Rotation

In diesem Kapitel wird die Polarisationssignatur eines rotierenden Galaxienhaufens für Inklinationen  $i = 0$  und  $\pi/2$  berechnet und diskutiert.

### 7.1 Polarisationssignaturen

Von der Diskussion des k-SZE ist schon bekannt, daß bei der Streuung der Photonen des CMB an den Elektronen in Galaxienhaufen lineare Polarisation entsteht, wenn sich der Haufen relativ zum CMB in der Himmelsebene bewegt. Die Polarisationsebenen standen dabei senkrecht auf der Richtung der dimensionslosen Geschwindigkeit  $\beta_{\perp}$ . Die Berechnung der gestreuten Stokesvektoren vereinfachte sich dadurch, daß alle Geschwindigkeitsvektoren entlang der Sichtlinie identisch waren (vgl. Kapitel 5).

Betrachtet man nun eine Elektronenwolke mit beliebigem Strömungsfeld, so sind im allgemeinen die Geschwindigkeitsvektoren entlang der Sichtlinie nicht mehr identisch. Sie haben insbesondere keine einheitliche Richtung mehr. Daher gibt es auch kein gemeinsames Ruhesystem, und man muß den gestreuten Stokesvektor an jedem Ort in der Wolke einzeln berechnen. Dies bedeutet aber, daß man für jeden Ort eine eigene Transformation des CMB-Spektrums in das lokale Ruhesystem benutzen muß.

Nun kommt man leicht auf die Idee, die Polarisation in diesem lokalen Ruhesystem zu berechnen und anschließend ihre Lorentzinvarianz auszunutzen, um die Gesamtpolarisation als Integral über die Einzelbeiträge entlang der Sichtlinie zu berechnen. Dies ist im allgemeinen aber falsch, denn durch die unterschiedlichen Richtungen der Geschwindigkeitsvektoren haben auch die Polarisationsebenen unterschiedliche Orientierung zueinander. Dadurch kommt es zur Depolarisation, die man nur mit einer vollständigen Angabe des gestreuten Stokesvektors im Ruhesystem des äußeren Beobachters berücksichtigen kann.

Das Ziel dieses Kapitels ist nicht, die Polarisationssignatur eines rotierenden Galaxienhaufens für beliebige Inklination zu berechnen. Es werden hier vielmehr Spezialfälle herausgegriffen, bei denen sich die Rechnung sehr vereinfacht und eine analytische Lösung erlaubt. Für den allgemeinen Fall muß auf numerische Methoden zurückgegriffen werden, welche sowohl die gestreuten Stokesvektoren (5.12) als auch die einzelnen Drehungen der Polarisationsbasis und Lorentztransformationen berücksichtigen. Dies soll jedoch in dieser Arbeit nicht weiter verfolgt werden.

### Ansatz zur Berechnung des Polarisationsgrads für $i = 0$ und $\pi/2$

Betrachtet man eine rotierende Elektronenscheibe von der Seite ( $i = \pi/2$ ), so liegen alle Geschwindigkeitsvektoren in einer Ebene senkrecht zur Rotationsachse. Die Polarisations Ebenen entlang der Sichtlinie fallen dann ebenfalls zusammen. Damit kann man in diesem speziellen Fall den Grad der Gesamtpolarisation durch ein Integral über die Einzelbeiträge entlang der Sichtlinie berechnen. Auch für eine Betrachtung entlang der Rotationsachse ( $i = 0$ ), reduziert sich die Rechnung auf ein Sichtlinienintegral über die Einzelbeiträge.

Da die Gleichung (5.12) im allgemeinen nur numerisch lösbar ist, soll hier zunächst nur den Grad der Polarisation im RJ-Bereich berechnet werden. Dazu geht man von Gleichung (5.21) aus. Den Grad der Gesamtpolarisation durch Rotation erhält man aus dem Sichtlinienintegral

$$P_{\text{Rot}}^{\text{RJ}} = \frac{1}{10} \int \beta_{\perp, \text{Rot}}^2 d\tau = \frac{1}{10} \sigma_{\text{T}} \int \beta_{\perp, \text{Rot}}^2 n_{\text{e}} dl. \quad (7.1)$$

Diese Gleichung ist nur für die Spezialfälle  $i = 0$  und  $i = \pi/2$  gültig.

## 7.2 PolarisationsSignatur eines Galaxienhaufens

Zunächst wird in diesem Abschnitt auf die PolarisationsSignatur eines Galaxienhaufens, der sich in der Himmelsebene mit  $\mathbf{v}_{\perp}$  bewegt, eingegangen. Anschließend wird die PolarisationsSignatur eines rotierenden Galaxienhaufens für die Inklinationen  $i = 0$  und  $\pi/2$  mit Hilfe von (7.1) berechnet. Die Koordinaten seien wie in Kapitel 6 gewählt. Als Modell für die Dichte der Elektronen wird das modifizierte  $\beta$ -Modell nach Gleichung (6.6) verwendet.

### PolarisationsSignatur eines Galaxienhaufens durch globale Bewegung

Die PolarisationsSignatur im RJ-Bereich auf Grund der globalen Bewegung des Galaxienhaufens läßt sich mit Hilfe von Gleichung (5.21) berechnen. Darin ist  $\beta_{\perp}$  die dimensionslose Geschwindigkeit des Galaxienhaufens in der Himmelsebene. Eine radiale Bewegung, also eine Bewegung parallel zur Sichtlinie, ergibt keine Polarisation. Die vom Ort in der Himmelsebene abhängige optische Tiefe  $\tau$  erhält man aus dem Sichtlinienintegral über die Elektronendichte. Mit Gleichung (6.6) ergibt sich

$$\tau(x, y, i) = \frac{1}{2} \kappa \tau_{\text{c}} \frac{1}{\sqrt{S_i^2 + \iota^2 C_i^2}} \left( 1 + \frac{\iota^2}{S_i^2 + \iota^2 C_i^2} \frac{x^2}{r_{\text{c}}^2} + \frac{y^2}{r_{\text{c}}^2} \right)^{\frac{1}{2} - \gamma} \quad (7.2)$$

für die optische Tiefe.<sup>1</sup> Es wurden die Abkürzungen (6.15) benutzt.

Der Grad der Polarisation im RJ-Bereich ist dann durch

$$P_{\text{Tr}, i}^{\text{RJ}} = \frac{1}{10} \tau(x, y, i) \beta_{\perp, \text{Tr}}^2 \quad (7.3)$$

gegeben. Der Polarisationsgrad hat bis auf einen Vorfaktor die gleiche  $x, y$ -Abhängigkeit wie das relative Temperaturdekrement durch den th-SZE nach (6.17). Die Polarisations Ebenen stehen alle senkrecht zur Richtung der Geschwindigkeit  $\mathbf{v}_{\perp}$  in der Himmelsebene.

<sup>1</sup>Die Abplattung  $\iota^{-1}$  wird als Modellparameter berücksichtigt. Die Inklination  $i$  ist hier als Winkel zwischen der Sichtlinie und der kleinen Halbachse definiert.

### Polarisationssignatur nach dem Modell starrer Rotation ( $i = \pi/2$ )

Für eine Inklination von  $i = \pi/2$  ist die Dichte der Elektronen durch

$$n_e(\mathbf{r}) = n_{e0} \left( 1 + \frac{\iota^2 x^2 + y^2}{r_c^2} + \frac{z^2}{r_c^2} \right)^{-\gamma} \quad (7.4)$$

gegeben. Bei starrer Rotation um die  $x$ -Achse ergibt sich die zur Sichtlinie senkrechte Komponente der Rotationsgeschwindigkeit als

$$\mathbf{v}_\perp = z\omega \mathbf{e}_y, \quad (7.5)$$

wobei  $\mathbf{e}_y$  der Einheitsvektor in  $y$ -Richtung ist. Mit der Abkürzung (6.29b) und

$$A^2 = 1 + \frac{\iota^2 x^2 + y^2}{r_c^2} \quad (7.6)$$

erhält man durch Einsetzen von (7.4) und (7.5) in (7.1) ein Integral der Form

$$I = \int_0^\infty \xi^2 (A^2 + \xi^2)^{-\gamma} d\xi. \quad (7.7)$$

Dieses divergiert für  $\gamma \leq 3/2$ , was auf die unphysikalischen Beiträge starrer Rotation zurückzuführen ist (vgl. Kapitel 6). Da der typische Wert von  $\gamma$  gleich 1 ist, muß das Rotationsprofil für die Berechnung der Polarisationssignatur abgeändert werden.

### Polarisationssignatur nach dem modifizierten Rotationsmodell ( $i = \pi/2$ )

In Abschnitt 6.4 wurde eine mögliche Modifikation des Rotationsprofils diskutiert, welche nun verwendet werden soll.

Aus der Gleichung (6.27) ergibt sich die Komponente der Rotationsgeschwindigkeit in der Himmelsebene als

$$\beta_{\perp, \text{mod}} = \begin{cases} \beta_c \frac{z}{r_c} & \text{für } \rho \leq R_x \\ \beta_c \frac{R_x}{r_c} \frac{z}{\rho} & \text{für } \rho > R_x, \end{cases} \quad (7.8)$$

wobei  $R_x$  und  $\rho$  durch (6.25) und (6.26) gegeben sind.

Setzt man (7.4) und (7.8) in (7.1) ein und benutzt die Abkürzungen (6.29) und (7.6), so ist der Grad der Gesamtpolarisation im RJ-Bereich bei einer Inklination von  $\pi/2$  zur Rotationsachse durch

$$P_{\text{Rot}, \frac{\pi}{2}}^{\text{RJ}} = \frac{1}{10} \tau_c \beta_c^2 \left[ \int_0^{\Sigma/r_c} \xi^2 (A^2 + \xi^2)^{-\gamma} d\xi + \frac{R_x^2}{r_c^2} \int_{\Sigma/r_c}^\infty \frac{\xi^2}{\chi^2 + \xi^2} (A^2 + \xi^2)^{-\gamma} d\xi \right] \quad (7.9)$$

gegeben. Die Integrale in (7.9) konvergieren für  $\gamma > 1/2$ . Für allgemeines  $\gamma$  findet man auch mit Hilfe von Computer-Algebra-Programmen keine Lösung von (7.9). Man muß den Grad der Polarisation daher im allgemeinen numerisch berechnen.

Benutzt man für  $\gamma$  den für Galaxienhaufen typischen Wert von 1, so kann man die Integrale analytisch lösen. Sie ergeben sich als

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\Sigma/r_c} \frac{\xi^2}{A^2 + \xi^2} d\xi \\ &= \frac{\Sigma}{r_c} - A \arctan\left(\frac{\Sigma}{r_c A}\right) \end{aligned} \quad (7.10a)$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\Sigma/r_c}^{\infty} \frac{\xi^2}{(\chi^2 + \xi^2)(A^2 + \xi^2)} d\xi \\ &= \frac{\pi}{2} \frac{A - |\chi|}{A^2 - \chi^2} - \frac{A \arctan\left(\frac{\Sigma}{r_c A}\right) - \chi \arctan\left(\frac{\Sigma}{r_c \chi}\right)}{A^2 - \chi^2}. \end{aligned} \quad (7.10b)$$

Mit der Funktionsdefinition

$$F(X, Y) = \frac{Y}{r_c} - X \arctan\left(\frac{Y}{r_c X}\right) \quad (7.11)$$

erhält man für den Polarisationsgrad im RJ-Bereich

$$P_{\text{Rot}, \frac{\pi}{2}}^{\text{RJ}} = \frac{1}{10} \tau_c \beta_c^2 \left[ \frac{\pi}{2} \frac{R_x^2}{r_c^2} \frac{A - |\chi|}{A^2 - \chi^2} + F(A, \Sigma) - \frac{R_x^2}{r_c^2} \frac{F(\chi, \Sigma) - F(A, \Sigma)}{A^2 - \chi^2} \right]. \quad (7.12)$$

Der Grad der Polarisation nach Gleichung (7.12) ist in der Abbildung 7.1 dargestellt. Die Parameter  $R$  und  $\epsilon$  wurden frei gewählt. Zum morphologischen Vergleich wurde in Abbildung 7.1a auch das Temperaturdekrement auf Grund des th-SZE in Graustufen untergelegt. Das Temperaturdekrement hat die Form einer oblaten Ellipse. Im Gegensatz dazu hat die Polarisations-signatur die Form einer prolaten Ellipse. Die Form der Polarisations-signatur ist stark davon abhängig, wie die Parameter  $R$  und  $\epsilon$  gewählt werden. Für  $\epsilon \rightarrow 0$  entartet der starr rotierende Bereich zu einem Zylinder entlang der  $x$ -Achse. Dadurch wird auch die Elongation der Ellipse der Polarisations-signatur in  $x$ -Richtung größer. Mit zunehmender Abplattung ( $1 \ll \epsilon$ ) entartet der starr rotierende Bereich zu einer dünnen Scheibe. Die CMBR ist dann nur in einem schmalen Saum durch das Zentrum des Galaxienhaufens polarisiert.

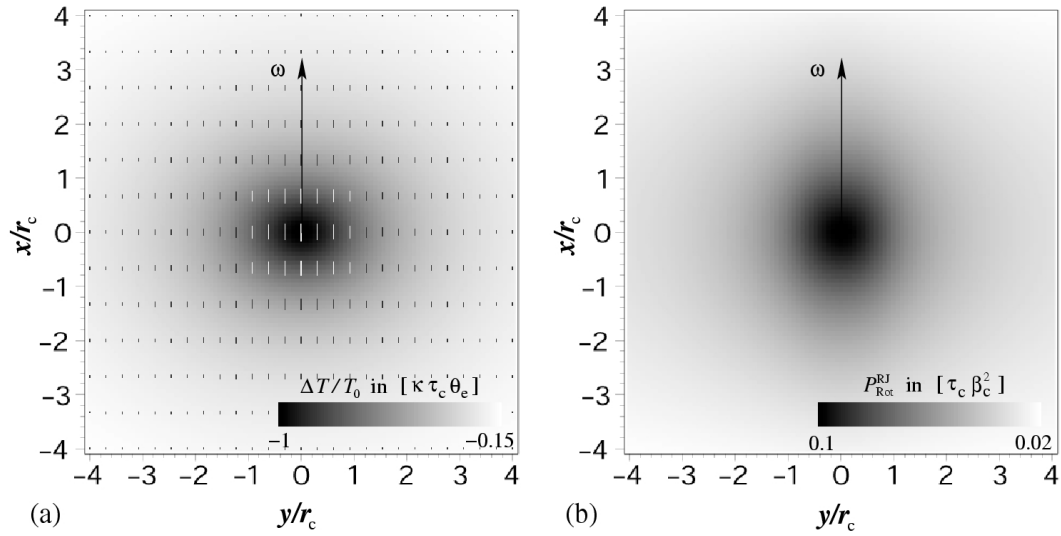
Die Abbildung 7.2 zeigt den Polarisationsgrad entlang der  $y$ -Achse für verschiedene Werte von  $\gamma$ . Die Integrale in (7.9) wurden numerisch berechnet. Mit steigendem  $\gamma$  nimmt der Grad der Polarisation wegen des stärkeren Abfalls der Elektronendichte ab.

Für den zentralen Polarisationsgrad erhält man aus Gleichung (7.12)

$$P_{c, \frac{\pi}{2}}^{\text{RJ}} = \frac{1}{10} \tau_c \beta_c^2 \left[ \frac{\pi}{2} \frac{R^2}{r_c^2} + \frac{R}{r_c} - \left( \frac{R^2}{r_c^2} + 1 \right) \arctan \frac{R}{r_c} \right]. \quad (7.13)$$

Dieser ist nicht von  $\epsilon$  abhängig. Aus  $R = r_c$  folgt  $P_c^{\text{RJ}} = \frac{1}{10} \tau_c \beta_c^2$ . Für  $\beta_c = 0.003$  und einer zentralen optischen Tiefe  $\tau_c = 0.1$  ergibt dies eine Polarisation von  $P_c^{\text{RJ}} = 9 \cdot 10^{-8}$ . Dies liegt nicht im Bereich des heute messbaren.

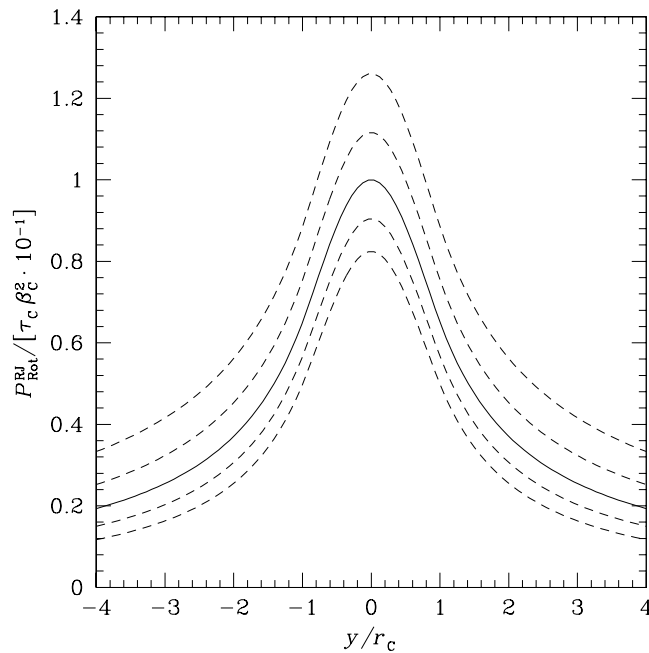
In Abbildung 7.3 ist der zentrale Polarisationsgrad in Abhängigkeit von  $\gamma$  und  $R$  aufgetragen. Mit zunehmenden  $R$  steigt der Grad der Polarisation und die Abhängigkeit von  $\gamma$  wird ebenfalls stärker.



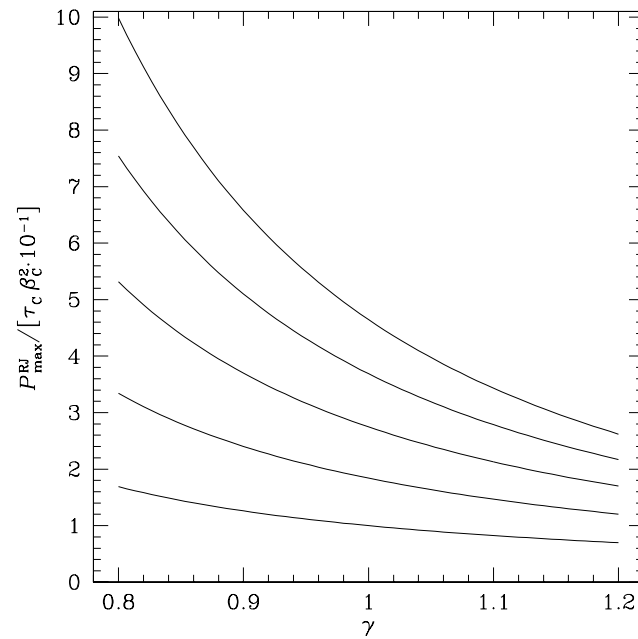
**Abbildung 7.1:** Polarisationsignatur eines rotierenden Galaxienhaufens für  $i = \pi/2$ : Alle Berechnungen wurden für  $R = r_c$ ,  $\iota^{-1} = 0.8$  und  $\epsilon^{-1} = 5$  durchgeführt.

(a) Die Striche zeigen die Richtung der Polarisierungsebenen. Der Grad der Polarisierung wurde durch die Länge der Striche illustriert. Die Polarisierungsebenen liegen alle parallel zur  $x$ -Achse. Der Grad der Polarisierung ist im Zentrum am größten. Zusätzlich wurde das relative Temperaturdekrement auf Grund des th-SZE in Graustufen untergelegt.

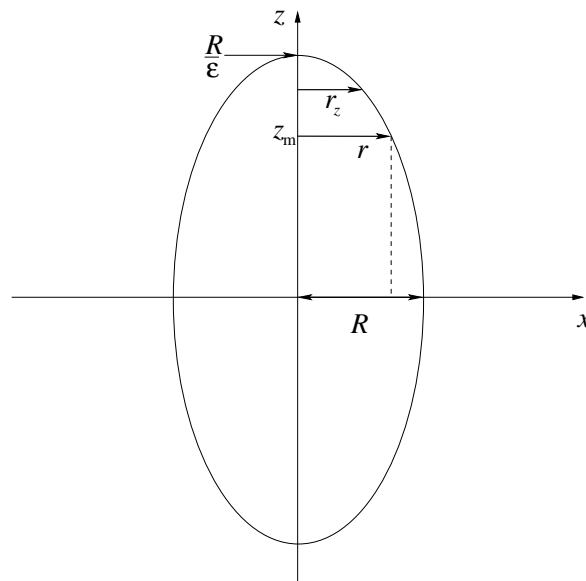
(b) Der Grad der Polarisierung in Graustufen. Die Form der Polarisationsignatur ist stark davon abhängig, wie die Parameter des Rotationsmodells gewählt werden.



**Abbildung 7.2:** Grad der Polarisierung entlang der  $y$ -Achse für  $i = \pi/2$ : Alle Berechnungen wurden für  $R = r_c$ ,  $\iota^{-1} = 0.8$  und  $\epsilon^{-1} = 5$  durchgeführt. Der Wert für  $\gamma$  steigt in Schritten von 0.05 von 0.9 für die oberste Kurve auf 1.1 für die unterste Kurve. Die durchgezogene Linie entspricht  $\gamma = 1$ .



**Abbildung 7.3:** Grad der zentralen Polarisation für  $i = \pi/2$  in Abhängigkeit von  $\gamma$  für verschiedene  $R$ : Der Wert für  $R$  steigt von  $r_c$  für die unterste Kurve auf  $3r_c$  für die oberste Kurve in Schritten von  $0.5$ . Die Abhängigkeit von  $\gamma$  wird mit wachsendem  $R$  größer.



**Abbildung 7.4:** Veranschaulichung der Größen  $R$ ,  $r$ ,  $r_z$ ,  $z_m$  und  $R/\epsilon$

### Polarisationssignatur nach dem modifizierten Rotationsmodell ( $i = 0$ )

Bei einer Inklination von  $i = 0$  zur Rotationsachse ist die Elektronendichte durch

$$n_e(\mathbf{r}) = n_{e0} \left( 1 + \frac{x^2 + y^2}{r_c^2} + \frac{\iota^2 z^2}{r_c^2} \right)^{-\gamma} \quad (7.14)$$

gegeben. Den Abstand von der Rotationsachse erhält man durch

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (7.15)$$

Damit ist der Bereich starrer Rotation durch das Ellipsoid

$$r^2 + \epsilon^2 z^2 = R^2 \quad (7.16)$$

begrenzt.

Die dimensionslose Komponente der Rotationsgeschwindigkeit in der Himmelsebene ergibt sich als

$$\beta_{\perp, \text{mod}} = \begin{cases} \beta_c \frac{r}{r_c} & \text{für } |z| \leq z_m \\ \beta_c \frac{r_z}{r_c} & \text{für } z_m \leq |z| \leq \frac{R}{\epsilon}. \end{cases} \quad (7.17)$$

Hier sind  $z_m$  und  $r_z$  durch

$$z_m = \begin{cases} \frac{1}{\epsilon} \sqrt{R^2 - r^2} & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } R < r \end{cases} \quad (7.18a)$$

$$r_z = \begin{cases} \sqrt{R^2 - \epsilon^2 z^2} & \text{für } |z| \leq \frac{R}{\epsilon} \\ 0 & \text{für } \frac{R}{\epsilon} < |z| \end{cases} \quad (7.18b)$$

gegeben (vgl. Abb.7.4).

Setzt man (7.14) und (7.17) in (7.1) ein und benutzt die Abkürzung  $\xi = \iota z / r_c$ , so ist der Polarisationsgrad im RJ-Bereich bei einer Inklination von  $i = 0$  zur Rotationsachse durch

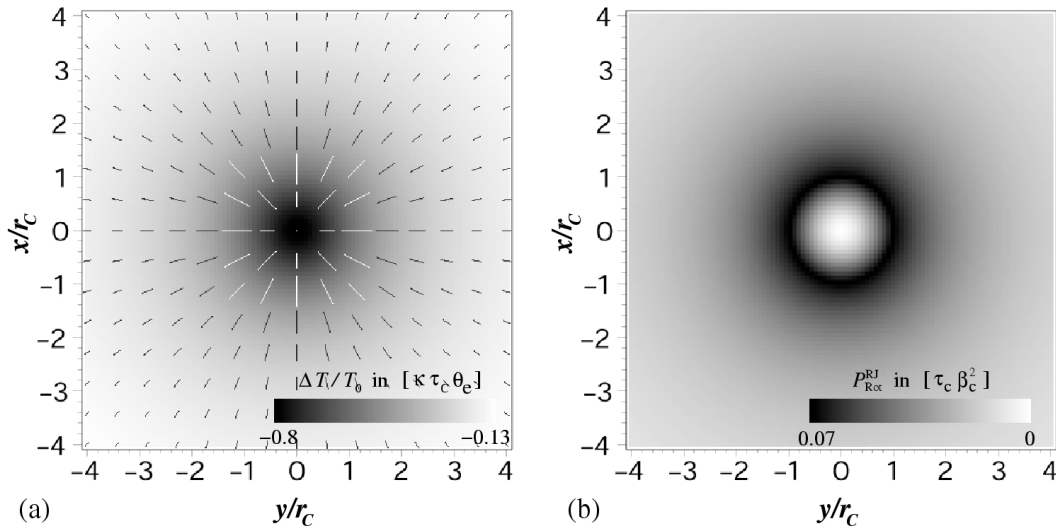
$$P_{\text{Rot},0}^{\text{RJ}} = \frac{1}{10} \frac{\tau_c}{\iota} \beta_c^2 \left[ \frac{r^2}{r_c^2} I_3 + \frac{R^2}{r_c^2} I_4 \right] \quad (7.19)$$

gegeben. Dabei sind die Integrale

$$I_3 = \int_0^{\iota z_m / r_c} \left( 1 + \frac{r^2}{r_c^2} + \xi^2 \right)^{-\gamma} d\xi \quad (7.20a)$$

$$I_4 = \int_{\iota z_m / r_c}^{\iota R / \epsilon r_c} \left( 1 - \frac{\epsilon^2 r_c^2}{\iota^2 R^2} \xi^2 \right) \cdot \left( 1 + \frac{r^2}{r_c^2} + \xi^2 \right)^{-\gamma} d\xi \quad (7.20b)$$

zu lösen, welche mit  $\gamma > 1/2$  für beliebige  $\epsilon$  konvergieren.



**Abbildung 7.5:** Polarisationssignatur eines rotierenden Galaxienhaufens für  $\gamma = 1$  und  $i = 0$ : Alle Berechnungen wurden für  $R = r_c$ ,  $\iota^{-1} = 0.8$  und  $\epsilon^{-1} = 5$  durchgeführt.

(a) Die Striche zeigen die Richtung der Polarisierungsebenen. Der Grad der Polarisation wurde durch die Länge der Striche illustriert. Im Zentrum ist der Polarisationsgrad gleich 0 und erreicht sein Maximum bei  $r \approx R$ . Zusätzlich wurde das relative Temperaturdekrement auf Grund des th-SZE in Graustufen untergelegt.

(b) Der Grad der Polarisation in Graustufen: Der Polarisationsgrad hat sein Maximum in einem Ring um das Zentrum des Galaxienhaufens.

Im allgemeinen muß man den Grad der Polarisation numerisch bestimmen. Für  $\gamma = 1$  kann man die Integrale (7.20) jedoch analytisch lösen. Man erhält

$$I_3 = \frac{\arctan \frac{\iota z_m}{\sqrt{r_c^2 + r^2}}}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{r_c^2}}} \quad (7.21a)$$

$$I_4 = \left[ 1 + \frac{\epsilon^2 r_c^2}{\iota^2 R^2} \left( 1 + \frac{r^2}{r_c^2} \right) \right] \cdot H(r) - \frac{\epsilon r_c}{\iota R} \left( 1 - \frac{\epsilon z_m}{R} \right) \quad (7.21b)$$

$$H(r) = \frac{\arctan \frac{\iota R}{\sqrt{r_c^2 + r^2}} - \arctan \frac{\iota z_m}{\sqrt{r_c^2 + r^2}}}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{r_c^2}}} \quad (7.21c)$$

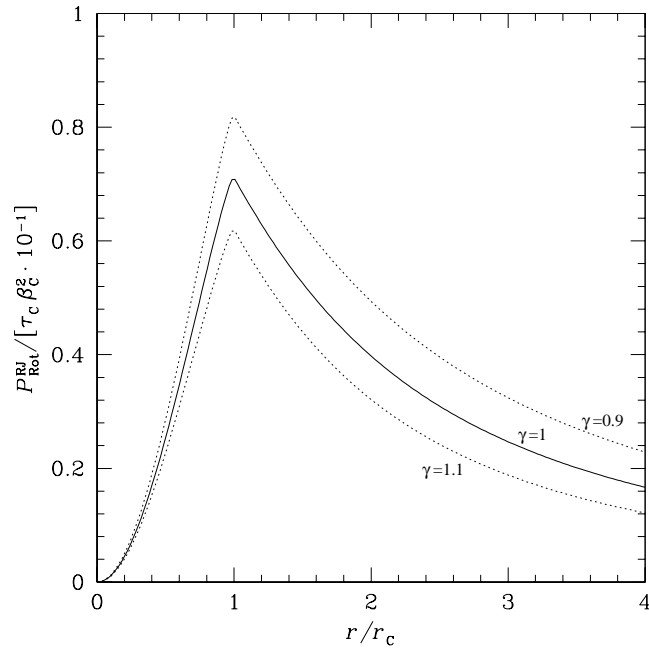
Der Grad der Polarisation nach Gleichung (7.19) für  $\gamma = 1$  ist in Abbildung 7.5 dargestellt. Der Polarisationsgrad hat sein Maximum in einem Ring mit Radius  $R$  um das Zentrum des Galaxienhaufens, also dort, wo der Bereich starrer Rotation in den mit konstanter Geschwindigkeit rotierenden Bereich übergeht.

Die Abbildung 7.6 zeigt den numerisch berechneten Grad der Polarisation in Abhängigkeit vom Abstand  $r$  für verschiedene Werte von  $\gamma$ . Mit wachsendem  $\gamma$  nimmt der Grad der Polarisation wegen des stärkeren Abfalls der Elektronendichte ab. Die Lage des Maximums ist nicht von  $\gamma$  abhängig.

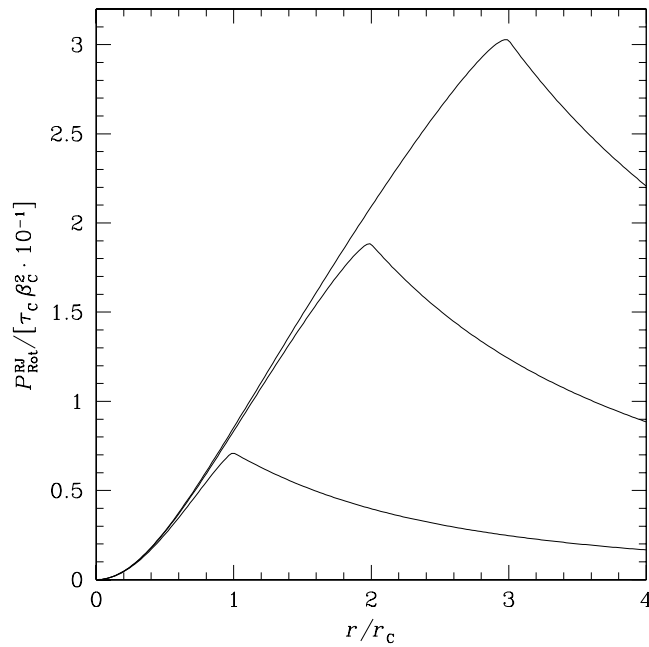
Der Abbildung 7.7 entnimmt man, daß sich das Maximum der Polarisation für größeres  $R$  nach außen verschiebt. Der Wert des Maximum wird mit zunehmenden  $R$  ebenfalls größer.

In Abbildung 7.8 wurde der Parameter  $\epsilon$  variiert. Die Lage des Maximums ist nicht von  $\epsilon$  abhängig. Für abnehmende  $\epsilon$  nähert sich der radiale Verlauf des Polarisationsgrads den Verlauf nach Gleichung (7.22) an.

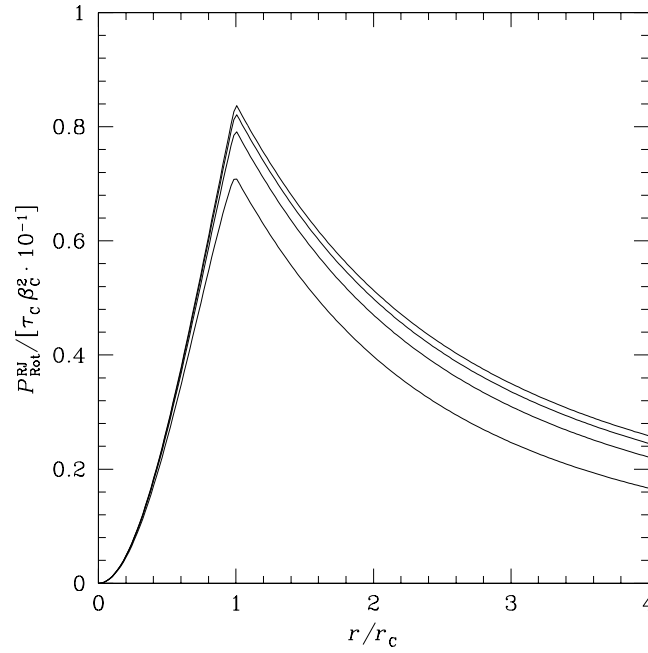




**Abbildung 7.6:** Grad der Polarisation in Abhängigkeit vom Abstand  $r$  zum Zentrum für  $i = 0$  für verschiedene  $\gamma$ : Alle Berechnungen wurden mit  $R = r_c$ ,  $\iota^{-1} = 0.8$  und  $\epsilon^{-1} = 5$  durchgeführt. Die Lage des Maximums ist bei  $r = R$ .



**Abbildung 7.7:** Grad der Polarisation in Abhängigkeit vom Abstand  $r$  zum Zentrum für  $i = 0$  für verschiedene  $R$ : Alle Berechnungen wurden für  $\iota^{-1} = 0.8$ ,  $\epsilon^{-1} = 5$  und  $\gamma = 1$  durchgeführt. Die Lage des Maximums ist bei  $r = R$ .



**Abbildung 7.8:** Grad der Polarisation in Abhängigkeit vom Abstand  $r$  zum Zentrum für  $i = 0$  für verschiedene  $\epsilon$ : Alle Berechnungen wurden für  $R = r_c$ ,  $\iota^{-1} = 0.8$  und  $\gamma = 1$  durchgeführt. Die Kurven entsprechen von unten nach oben  $\epsilon = 1/5, 1/10, 1/15$  und  $1/20$ . Für abnehmende  $\epsilon$  nähert sich der Verlauf der Polarisation der Grenzfunktion (7.25) an.

Betrachtet man nun den Fall  $\epsilon \rightarrow 0$ , so entartet der Bereich starrer Rotation zu einem unendlichen Zylinder mit der Symmetrieachse parallel zur Rotationsachse. In diesem Fall lassen sich die Integrale (7.20) für  $\gamma > 1/2$  analytisch lösen. Der Polarisationsgrad im RJ-Bereich bei einer Inklination von  $i = 0$  zur Rotationsachse ist dann durch

$$P_{\text{Rot},0,\epsilon=0}^{\text{RJ}} = \frac{1}{10} \tau(x, y, 0) \beta_c^2 \cdot \begin{cases} \frac{r^2}{r_c^2} & \text{für } r \leq R \\ \frac{R^2}{r_c^2} & \text{für } R < r \end{cases} \quad (7.22)$$

gegeben. Hierbei wurde  $\tau(x, y, i)$  nach Gleichung (7.2) benutzt.

Für  $\gamma = 1$  kann man den Polarisationsgrad auch aus den Grenzwerten der Lösungen (7.21) berechnen: Für  $\epsilon \rightarrow 0$  geht  $z_m$  in

$$z_m^* = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} z_m = \begin{cases} \infty & \text{für } r \leq R \\ 0 & \text{für } R < r \end{cases} \quad (7.23)$$

über. Die Lösungen der Integrale (7.20) ergeben sich damit aus den Grenzwerten

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_3 = \frac{\arctan \frac{\iota z_m^*}{\sqrt{r_c^2 + r^2}}}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{r_c^2}}} \quad (7.24a)$$

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} I_4 = \frac{\frac{\pi}{2} - \arctan \frac{\iota z_m^*}{\sqrt{r_c^2 + r^2}}}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{r_c^2}}}. \quad (7.24b)$$

Für  $r \leq R$  verschwindet  $I_4$ . Gilt  $R < r$  so ist  $I_3 = 0$ . Aus (7.24) erhält man somit den Polarisationsgrad als

$$P_{\text{Rot},0,\epsilon=0}^{\text{RJ}} = \frac{1}{10} \frac{\tau_c}{\iota} \beta_c^2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{r_c^2}}} \cdot \begin{cases} \frac{r^2}{r_c^2} & \text{für } r \leq R \\ \frac{R^2}{r_c^2} & \text{für } R < r \end{cases} \quad (7.25)$$

Man erkennt unmittelbar, daß das Maximum der Polarisation bei  $r = R$ , also an der Grenze zwischen starrer und flacher Rotation, liegt.

### Polarisationssignatur bei Überlagerung von Translation und Rotation des Galaxienhaufens

Die Polarisationssignatur, welche durch eine Translation des betrachteten Galaxienhaufens mit der konstanten Geschwindigkeit  $\beta_{\perp,\text{Tr}}$  entsteht, wird für beliebige Inklination und beliebige Richtung der Geschwindigkeit in der Himmelsebene durch Gleichung (7.3) beschrieben.

Betrachtet man den Inklinationsfall  $i = \pi/2$ , so läßt sich die Polarisationssignatur, welche aus einer Translation und Rotation des Galaxienhaufens entsteht, nur unter der Bedingung mit Hilfe von Gleichung (7.1) berechnen, daß die Translationsgeschwindigkeit parallel zur Rotationsebene liegt: Im allgemeinen dreht sich die Richtung der resultierenden Geschwindigkeit  $\beta_{\perp} = \beta_{\perp,\text{Tr}} + \beta_{\perp,\text{Rot}}$  entlang der Sichtlinie. Deshalb kann man die Lorentzinvarianz der Polarisation nicht ausnutzen und muß die gestreuten Stokesvektoren für jeden Ort einzeln berechnen, was an dieser Stelle zu weit führt.

Für  $\beta_{\perp} = (\beta_{\perp,\text{Tr}} + \beta_{\perp,\text{mod}}) \mathbf{e}_y$ , wobei  $\mathbf{e}_y$  der Einheitsvektor in  $y$ -Richtung ist, erhält man aus (7.1)

$$\begin{aligned} P^{\text{RJ}} &= \frac{1}{10} \sigma_{\text{T}} \int_{-\infty}^{\infty} (\beta_{\perp,\text{Tr}} + \beta_{\perp,\text{mod}})^2 n_{\text{e}} dl \\ &= P_{\text{Tr},\frac{\pi}{2}}^{\text{RJ}} + P_{\text{Rot},\frac{\pi}{2}}^{\text{RJ}} + \frac{1}{10} \sigma_{\text{T}} \beta_{\perp,\text{Tr}} \int_{-\infty}^{\infty} \beta_{\perp,\text{mod}} n_{\text{e}} dl. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Hier ist  $P_{\text{Tr},\frac{\pi}{2}}^{\text{RJ}}$  durch (7.3) mit  $i = \pi/2$  und  $P_{\text{Rot},\frac{\pi}{2}}^{\text{RJ}}$  durch (7.12) gegeben.

Auf Grund der Symmetrie von  $\beta_{\perp,\text{mod}}$  nach Gleichung (7.8) fällt das Integral in (7.26) weg. Damit ist der Polarisationsgrad bei einer Überlagerung von Translation in  $y$ -Richtung und Rotation um die  $x$ -Achse als die Summe der Einzelbeiträge gegeben:

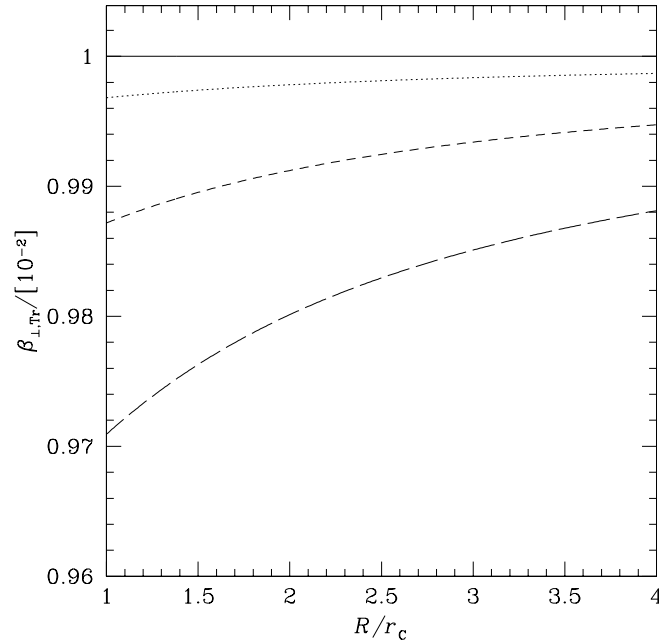
$$\boxed{P^{\text{RJ}} = P_{\text{Tr},\frac{\pi}{2}}^{\text{RJ}} + P_{\text{Rot},\frac{\pi}{2}}^{\text{RJ}}}. \quad (7.27)$$

Mit  $\gamma = 1$  erhält man aus (7.3) und (7.13) für die zentrale Polarisation

$$\boxed{P_c^{\text{RJ}} = \frac{1}{10} \tau_c \beta_{\perp,\text{Tr}}^2 \left[ \frac{\pi}{2} + \frac{\beta_c^2}{\beta_{\perp,\text{Tr}}^2} \left\{ \frac{\pi}{2} \frac{R^2}{r_c^2} + \frac{R}{r_c} - \left( \frac{R^2}{r_c^2} + 1 \right) \arctan \frac{R}{r_c} \right\} \right]}. \quad (7.28)$$

Ist das Verhältnis  $\beta_c/\beta_{\perp,\text{Tr}} \ll 1$ , so liefert die Rotation des Galaxienhaufens keinen merklichen Beitrag zur Gesamtpolarisation.

Die Geschwindigkeit  $\beta_{\perp,\text{Tr}}$  liegt bei Galaxienhaufen typischerweise in der Größenordnung  $10^{-2}$ . Im Falle reiner Translation ergibt sich daraus im RJ-Bereich eine zentrale



**Abbildung 7.9:** Berechnung von  $\beta_{\perp,Tr}$  aus der zentralen Polarisation nach Gleichung (7.28): Für  $P_c^{RJ}$  wurde ein Wert von  $\frac{\pi}{2} \tau_c \cdot 10^{-5}$  angenommen. Die Kurven entsprechen von oben nach unten  $\beta_R = 0, 0.001, 0.002$  und  $0.003$ . Die Geschwindigkeit  $\beta_{\perp,Tr}$  wird ohne Berücksichtigung der Rotation um bis zu 3% überschätzt.

Polarisation von  $P_c^{RJ} \approx 1.6 \tau_c \cdot 10^{-5}$ . Nimmt man nun an, daß diese Polarisation eine Folge von Translation und Rotation in der oben beschriebenen Weise ist, so läßt sich die Translationsgeschwindigkeit mit Hilfe von Gleichung (7.28) in Abhängigkeit von  $R$  und  $\beta_c$  bestimmen. Dabei muß aber noch folgendes beachtet werden:  $\beta_c$  ist der Betrag der Rotationsgeschwindigkeit am Kernradius  $r_c$ . Da die Größe des Bereichs starrer Rotation durch den Parameter  $R$  festgelegt wird, ist  $\beta_c$  durch

$$\beta_c = \beta_R \frac{r_c}{R} \quad (7.29)$$

zu ersetzen. Für  $\beta_R$  in der Größenordnung von  $10^{-3}$  überschreitet damit die Rotationsgeschwindigkeit in keinem Fall die Virialgeschwindigkeit des Galaxienhaufens.

In Abbildung 7.9 sind die Ergebnisse einer Berechnung der Geschwindigkeit  $\beta_{\perp,Tr}$  aus dem zentralen Polarisationsgrad dargestellt. Läßt man die Rotation unberücksichtigt, so wird der Betrag von  $\beta_{\perp,Tr}$  um bis zu 3% überschätzt. Bei typischen Pekuliargeschwindigkeiten von 3000 – 5000 km/s bedeutet dies einen Fehler von bis zu 90 – 150 km/s.

Betrachtet man nun den Fall  $i = 0$ , so läßt sich der Polarisationsgrad auf Grund der Überlagerung von Translation und Rotation des Galaxienhaufens im allgemeinen nur durch Angabe der gestreuten Stokesvektoren im System des Beobachters berechnen. Geht man jedoch davon aus, daß der Bereich starrer Rotation zu einem unendlichen Zylinder entlang der  $z$ -Achse entartet ist ( $\epsilon = 0$ ), so läßt sich die Berechnung der Polarisation wieder mit Hilfe von Gleichung (7.1) durchführen. Wegen der Zylindersymmetrie kann man die Richtung der Translationsgeschwindigkeit beliebig festlegen. Es wird hier zur Vereinfachung angenommen, daß  $\beta_{\perp,Tr}$  parallel zur  $y$ -Achse liegt:

$$\beta_{\perp,Tr} = \beta_{\perp,Tr} e_y.$$

Wie aus einfachen geometrischen Überlegungen folgt, ist die Rotationsgeschwindigkeit

$\beta_{\perp,\text{mod}}$  bei einer Inklination von  $i = 0$  zur Rotationsachse durch

$$\beta_{\perp,\text{mod}} = \beta_{\perp,\text{mod}} \begin{pmatrix} -\frac{y}{r} \\ \frac{x}{r} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.30)$$

gegeben, wobei der Betrag  $\beta_{\perp,\text{mod}}$  aus Gleichung (7.17) folgt und  $r = \sqrt{x^2 + y^2}$  ist. Für das Betragsquadrat der resultierenden Geschwindigkeit  $\beta_{\perp} = \beta_{\perp,\text{Tr}} + \beta_{\perp,\text{mod}}$  in der Himmelsebene erhält man somit

$$|\beta_{\perp}|^2 = \beta_{\perp,\text{Tr}}^2 + \beta_{\perp,\text{mod}}^2 + 2\beta_{\perp,\text{Tr}} \beta_{\perp,\text{mod}} \frac{x}{r}. \quad (7.31)$$

Dieses ist bezüglich einer Integration über  $z$  konstant.

Setzt man (7.31) in (7.1), so erhält man

$$\begin{aligned} P^{\text{RJ}} &= \frac{1}{10} \sigma_{\text{T}} \int_{-\infty}^{\infty} \left( \beta_{\perp,\text{Tr}}^2 + \beta_{\perp,\text{mod}}^2 + 2\beta_{\perp,\text{Tr}} \beta_{\perp,\text{mod}} \frac{x}{r} \right) n_{\text{e}} dz \\ &= \frac{1}{10} \tau(x, y, 0) \left( \beta_{\perp,\text{Tr}}^2 + \beta_{\perp,\text{mod}}^2 + 2\beta_{\perp,\text{Tr}} \beta_{\perp,\text{mod}} \frac{x}{r} \right). \end{aligned} \quad (7.32)$$

Mit (7.2) und (7.17) ist der Polarisationsgrad im RJ-Bereich damit durch

$$P^{\text{RJ}} = \frac{1}{10} \frac{\tau_{\text{c}}}{\iota} \beta_{\perp,\text{Tr}}^2 \frac{\pi}{2} \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{r^2}{r_{\text{c}}^2}}} \cdot \begin{cases} 1 + \frac{\beta_{\text{c}}^2}{\beta_{\perp,\text{Tr}}^2} \frac{r^2}{r_{\text{c}}^2} + 2 \frac{\beta_{\text{c}}}{\beta_{\perp,\text{Tr}}} \frac{x}{r_{\text{c}}} & \text{für } r \leq R \\ 1 + \frac{\beta_{\text{c}}^2}{\beta_{\perp,\text{Tr}}^2} \frac{R^2}{r_{\text{c}}^2} + 2 \frac{\beta_{\text{c}}}{\beta_{\perp,\text{Tr}}} \frac{R}{r_{\text{c}}} \frac{x}{r} & \text{für } R < r \end{cases} \quad (7.33)$$

gegeben.

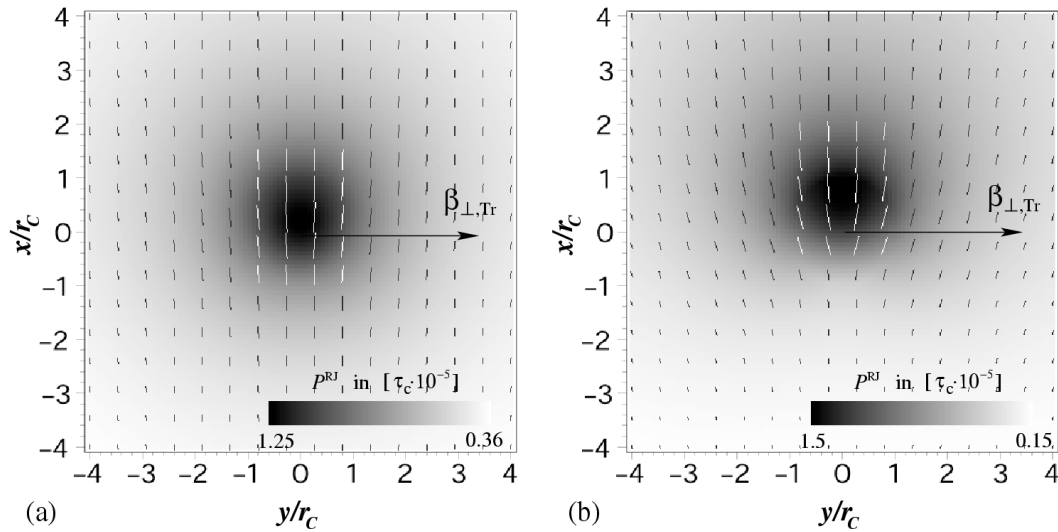
Die Normalenvektoren der Polarisierungsebenen liegen parallel zur Richtung von  $\beta_{\perp}$ . Die Richtung von  $\beta_{\perp}$  wird durch den normierten Vektor

$$\mathbf{e}_{\beta} = \frac{1}{|\beta_{\perp}|} \begin{pmatrix} -\frac{y}{r} \beta_{\perp,\text{mod}} \\ \beta_{\perp,\text{Tr}} + \frac{x}{r} \beta_{\perp,\text{mod}} \\ 0 \end{pmatrix} \quad (7.34)$$

gegeben. Damit liegt die Polarisierungsebene in Abhängigkeit vom Ort in der Himmelsebene in der Richtung

$$\mathbf{e}_P = \frac{1}{|\beta_{\perp}|} \begin{pmatrix} \beta_{\perp,\text{Tr}} + \frac{x}{r} \beta_{\perp,\text{mod}} \\ \frac{y}{r} \beta_{\perp,\text{mod}} \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (7.35)$$

In Abbildung 7.10 wurde die Polarisierungssignatur gemäß Gleichung (7.33) dargestellt. Die maximale Polarisation ist von der Größenordnung  $P^{\text{RJ}} \sim \tau_{\text{c}} \cdot 10^{-5}$ . Diese Polarisation sollte mit MAP und Planck messbar sein. Der Hauptbeitrag zur Polarisierung entsteht durch die Translation des Haufens relativ zum CMB. Infolge der Rotation des ICM ergeben sich aber zum einen deutliche Störungen der Morphologie der Polarisierungssignatur, zum anderen Drehungen der Polarisierungsebenen.



**Abbildung 7.10:** Polarisationssignatur bei Überlagerung von Translation und Rotation für  $i = 0$  nach Gleichung (7.33): Für alle Rechnungen wurde  $\beta_{\perp, \text{Tr}} = 0.01$ ,  $\iota^{-1} = 0.8$  und  $R = r_c$  angenommen. Die Striche zeigen die Richtung der Polarisationsebenen. Der Grad der Polarisation wurde durch die Länge der Striche illustriert. Ergänzend wurde der Grad der Polarisation in Graustufen untergelegt.

(a) Hier wurde von  $\beta_c = 0.001$  ausgegangen. Die Polarisationssignatur weicht kaum von der durch reine Translation ab.

(b) Hier wurde von  $\beta_c = 0.004$  ausgegangen. Die Einflüsse der Rotation machen sich nun bemerkbar: Die Polarisationsebenen liegen nicht mehr parallel zueinander. Das Maximum des Polarisationsgrads befindet sich nicht mehr im Zentrum des Galaxienhaufens.

## Ausblick

Die Rechnungen dieses Abschnitts haben gezeigt, daß eine Berücksichtigung der Strömungen des ICM für die Polarisationssignatur von Bedeutung ist. Die betrachteten Spezialfälle geben jedoch noch keinen vollständigen Aufschluß über die Art der zu erwartenden Effekte. Auf der Basis des hier verwendeten einfachen Rotationsmodells ließe sich ein Programm entwickeln, welches den Fall beliebiger Inklination zur Rotationsachse und beliebiger Frequenz numerisch berechnet. Durch zusätzliche theoretische Arbeiten, welche die Ursache und Art der Strömungen des ICM simulieren und näher quantifizieren, könnte das heuristische Rotationsmodell durch numerische Geschwindigkeitsfelder ersetzt werden. Damit sollten sich Polarisationssignaturen im CMB generell modellieren lassen.

Genaue Polarisationsmessungen, auf deren Basis sich dann umgekehrt Rückschlüsse auf die zugrunde liegenden Geschwindigkeitsfelder ableiten ließen, werden neben der erforderlichen Steigerung der Sensitivität der Polarimeter durch verschiedene Effekte erschwert. Beispielsweise entsteht linear polarisierte Radiostrahlung durch die Streuung am intergalaktischen Staub. Im Zentrum von Galaxienhaufen befinden sich häufig starke Radioquellen. Das Streulicht dieser Radioquellen am ICM ist wie die CMBR teilweise linear polarisiert, ohne daß dazu Strömungen des ICM nötig sind. Auch das Licht des Staubes in der Milchstraße ist teilweise linear polarisiert. Durch den Faraday-Effekt, der infolge von intergalaktischen Magnetfelder entsteht, kann es zur Drehung der Polarisationsebenen kommen. Die unterschiedliche Frequenzabhängigkeit der einzelnen Effekte sollte jedoch die Möglichkeit bieten, die verschiedenen Ursachen des polarisierten Lichts im Radiobereich voneinander zu trennen.

# Kapitel 8

## Zusammenfassung

Im Rahmen dieser Arbeit wurde die Streuung der Photonen des kosmischen Mikrowellenhintergrundes an den freien Elektronen des intergalaktischen Mediums von Galaxienhaufen untersucht. Dabei wurden konstante translatorische Bewegungen des Haufens sowie gleichmäßige Rotation des Elektronenmediums berücksichtigt.

Mit Hilfe eines einfachen Rotationsmodells gelang es in Kapitel 6, die relative Intensitätsänderung der kosmischen Mikrowellenhintergrundstrahlung auf Grund der Streuung am rotierenden Elektronenmedium in Abhängigkeit von der Inklination zur Rotationsachse analytisch zu berechnen. Durch eine Modifikation des Rotationsmodells wurde in Kapitel 7 auch die Berechnung der aus der Rotation folgenden Polarisations-signatur für einige Spezialfälle möglich.

Die Ergebnisse der Rechnungen zeigen, daß durch die Rotation des Elektronenmediums in Galaxienhaufen eine morphologische Veränderung des Temperaturdekrements auf Grund des Sunyaev-Zeldovich-Effekts entsteht: Die Rotation des Galaxienhaufens äußert sich in einer Verschiebung des maximalen Temperaturdekrements von einigen Bogensekunden. Diese Verschiebung sollte durch Vergleich der Röntgen- und Radio-Morphologie von Galaxienhaufen in Zukunft messbar sein. Der Absolutwert des maximalen Temperaturdekrements wird durch die Rotation des Elektronenmediums jedoch nicht wesentlich beeinflusst ( $\eta = \beta_c/\theta_e \leq 0.1$ ).

Des weiteren wird die Polarisations-signatur, welche aus der Translation des Galaxienhaufens relativ zum kosmischen Mikrowellenhintergrund in der Himmelsebene folgt, entscheidend durch eine Rotation des intergalaktischen Mediums von Galaxienhaufen beeinflusst: Eine Bestimmung der Komponente der Pekuliargeschwindigkeit von Galaxienhaufen in der Himmelsebene muß neben anderen Fehlerquellen eine mögliche Rotation des intergalaktischen Mediums von Galaxienhaufen berücksichtigen. Durch die Vernachlässigung einer Rotation mit Maximalgeschwindigkeiten von  $1000 \text{ km s}^{-1}$  folgen aus den Rechnungen relative Fehler für den Wert der Geschwindigkeit  $\beta_{\perp, \text{Tr}}$  von bis zu 3%. Bei typischen Pekuliargeschwindigkeiten von  $3000 - 5000 \text{ km s}^{-1}$  bedeutet dies einen Fehler im Absolutwert der Geschwindigkeit  $\beta_{\perp, \text{Tr}}$  von  $90 - 150 \text{ km s}^{-1}$ .

In Kapitel 5 wurde der Polarisationsgrad der kosmischen Mikrowellenhintergrundstrahlung, welcher aus der Pekuliarbewegung eines Galaxienhaufens folgt, analytisch und numerisch behandelt. Dabei wurde eine Näherungsformel für den Grad der Polarisation im Wien-Bereich des Mikrowellenhintergrundspektrums abgeleitet, welche die numerischen Ergebnisse bis zu sehr hohen Frequenzen vollständig beschreibt. Da der Grad der Polarisation im Wien-Bereich zunimmt, sollten zukünftige Missionen auch diesen Frequenzbereich untersuchen.

MAP und PLANCK werden neue Erkenntnisse über das Spektrum der Anisotropien in der Temperatur und der Polarisation des kosmischen Mikrowellenhintergrundes liefern. Sie werden bei der Durchmusterung des Himmels viele weit entfernte Gala-

xienhaufen indirekt durch ihr Temperaturdekrement entdecken. Mit Hilfe von genauen Polarisationsmessungen ließe sich der Strömungszustand der Materie der Galaxienhaufen in frühen Phasen des Kosmos bestimmen. Das räumliche Auflösungsvermögen (MAP:  $\sim 1^\circ$ ; PLANCK:  $\sim 10'$ ) sowie die Empfindlichkeit der Polarimeter ( $\sim 5 \cdot 10^{-6}$ ) von MAP und PLANCK sollten eine marginal signifikante Messung der in dieser Arbeit diskutierten Effekte ermöglichen. Zusätzlich müssen Präzisionsmessungen im Radio-, Sub-mm- und Röntgenbereich vorgenommen werden, die die genaue Struktur der Gebiete mit Temperaturdekrement auf Sub-Bogensekunden Skalen feststellen. Die Anforderungen an die Empfindlichkeit der Polarimeter zur Auflösung der Effekte möglicher Rotation sind bis zu Frequenzen von ca. 100 GHz enorm hoch ( $P \sim 10^{-8}$ ) und stellen deshalb eine Herausforderung an die Instrumentenentwicklung dar. Allerdings verbessert sich die Situation im Wien-Bereich des Spektrums der kosmischen Mikrowellenhintergrundstrahlung um etwa zwei Größenordnungen.

Die Ergebnisse dieser Arbeit zeigen, daß die Strömungen des intergalaktischen Mediums von Galaxienhaufen messbare Signaturen im kosmischen Mikrowellenhintergrund hinterlassen. Sie tragen damit merklich zum astrophysikalischen Vordergrund bei und müssen folglich bei der Analyse der Messdaten des Anisotropienspektrums berücksichtigt werden.



# Anhang A

## Wichtige Funktionen

### A.1 $\Gamma$ -Funktion

#### Definition

Die  $\Gamma$ -Funktion ist durch das Integral

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt \quad \text{für } \Re z > 0 \quad (\text{A.1})$$

definiert, wobei  $z$  eine komplexe Zahl mit positivem Realteil sein muß.

#### Eigenschaften

Die hier wichtigen Eigenschaften der  $\Gamma$ -Funktion sind:

$$\Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad (\text{A.2a})$$

$$\Gamma(n+1) = n! \quad \text{für } n \in \mathbb{N} \cup \{0\} \quad (\text{A.2b})$$

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}. \quad (\text{A.2c})$$

Aus (A.2c) kann man durch vollständige Induktion

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{n!!}{2^n} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \quad (\text{A.2d})$$

herleiten. Hierbei wurde  $n!!$  als

$$n!! = 1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1) \quad (\text{A.2e})$$

definiert. [47, 48]

### A.2 Modifizierte Besselfunktionen $K_m$ und $I_q$

#### Definition

Die modifizierte Besselfunktion  $K_p$  ist durch

$$K_p(z) = \frac{\pi(I_{-p}(z) - I_p(z))}{2 \sin p\pi} \quad (\text{A.3})$$

definiert. Für  $p$  und  $z$  gilt dabei

$$p \in \mathbb{R} \quad \text{mit} \quad p \neq 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (\text{A.4a})$$

$$z \in \mathbb{C} \quad \text{mit} \quad |z| < \infty, z \notin ]-\infty, 0]. \quad (\text{A.4b})$$

Die Funktion  $I_p$  ergibt sich aus der Besselfunktion  $J_p$  durch

$$I_q(z) = \frac{J_q(iz)}{i^q} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k! \Gamma(q+k+1)} \left(\frac{z}{2}\right)^{2k+q}, \quad (\text{A.5})$$

wobei  $q$  reell ist.

Die Funktion  $K_m$  mit  $m \in \mathbb{Z}$  ergibt sich aus dem Limes

$$K_m(z) = \lim_{p \rightarrow m} K_p(z) = \frac{(-1)^m}{2} \left( \frac{\partial I_{-p}(z)}{\partial p} - \frac{\partial I_p(z)}{\partial p} \right)_{p=m}, \quad (\text{A.6})$$

wobei noch  $0 < |z| < \infty$  gelten muß. Für kleine  $z$  divergiert  $K_n$  wie  $K_n \approx \frac{1}{2}(n-1)! \left(\frac{z}{2}\right)^{-n}$  mit  $n \in \mathbb{N}$ . Für große Argumente fällt  $K_n$  proportional zu  $e^{-z}$ . [47, 48]

# Literaturverzeichnis

- [1] A.A. Penzias and R.W. Wilson. A measurement of excess antenna temperature at 4080 mc/s. *Astrophysical Journal*, 142:419, 1965.
- [2] R.H. Dicke, P.J.E. Peebles, G. Roll P, and D.T. Wilkinson. Cosmic black-body radiation. *Astrophysical Journal*, 142:414–419, 1965.
- [3] E. Hubble. A relation between distance and radial velocity among extragalactic nebulae. *Proc. Nat. Acad. Sci. (USA)*, 15:169–173, 1929.
- [4] G. Gamov. Expanding universe and the origin of elements. *Phys. Rev.*, 70:572–573, 1946.
- [5] COBE homepage. <http://space.gsfc.nasa.gov/astro/cobe/> .
- [6] D.J. Fixsen, E.S. Cheng, J.M. Gales, J.C. Mather, R.A. Shafer, and E.L. Wright. The cosmic microwave background spectrum from the full COBE FIRAS data set. *Astrophysical Journal*, 473:576–587, 1996.
- [7] M. White, D. Scott, and J. Silk. Anisotropies in the cosmic microwave background. *Annual Reviews in Astronomy and Astrophysics*, 32:319–370, 1994.
- [8] Asantha Cooray and Wayhe Hu. Imprint of reionization on the cosmic microwave background bispectrum. *Astrophysical Journal*, 534:533–550, 2000.
- [9] Ya. B. Zeldovich and R. A. Sunyaev. The interaction of matter and radiation in a hot-model universe. *Astrophysics and Space Science*, 4:301–316, 1969.
- [10] R. A. Sunyaev and Ya. B. Zeldovich. The velocity of clusters of galaxies relative to the microwave background. A possibility of its measurement. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 190:413–420, 1980.
- [11] Yoel Rephaeli. Comptonisation of the cosmic microwave background: The Sunyaev-Zeldovich effect. *Annual Reviews in Astronomy and Astrophysics*, 33:541–79, 1995.
- [12] Uros Seljak and Matias Zaldarriaga. A line of sight integration approach to cosmic microwave background anisotropies. *Astrophysical Journal*, 469:437–444, 1996.
- [13] BOOMERANG homepage. <http://www.physics.ucsb.edu/boomerang/> .
- [14] MAXIMA homepage. <http://cfpa.berkeley.edu/group/cmb/> .
- [15] MAP homepage. <http://map.gsfc.nasa.gov/> .
- [16] Pavel Naselsky, Jens Schmalzing, Jesper Sommer-Larsen, and Stenn Hannested. Cosmic microwave background polarisation and the ionization history of the universe. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 000:1–4, 2000.

- 
- [17] A. Unsöld and B. Baschek. *Der neue Kosmos*. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York London Paris Tokyo, 1988.
- [18] Kurt Roettiger and Ricardo Flores. A prediction of observable rotation in the intracluster medium of Abell 3266. *Astrophysical Journal*, 538:92–97, 2000.
- [19] Wolfgang Wöger. Fundamentalkonstanten 1999. *Physikalische Blätter*, 56. Jahrgang:Beilage, März 2000.
- [20] Alfred Weigert und Heinrich J. Wendker. *Astronomie und Astrophysik – Ein Grundkurs*. VCH-Verlagsgesellschaft mbH, 1996.
- [21] U. E. Schröder. *Spezielle Relativitätstheorie*. Harri Deutsch Verlag, 1994.
- [22] H. Goenner. *Einführung in die spezielle und allgemeine Relativitätstheorie*. Spektrum Akademischer Verlag, 1996.
- [23] George B. Rybicki and Alan P. Lightman. *Radiative processes in astrophysics*. John Wiley and Sons, 1979.
- [24] J.A. Peacock. *Cosmological Physics*. Cambridge University Press, 1999.
- [25] T. Fließbach. *Allgemeine Relativitätstheorie*. Spektrum Akademischer Verlag, 1998.
- [26] P.J.E. Peebles. *Principles of physical cosmology*. Princeton Series in Physics, 1993.
- [27] H. Goenner. *Einführung in die Kosmologie*. Spektrum Akademischer Verlag, 1994.
- [28] Max Schubert und Gerhard Weber. *Quantentheorie*. Spektrum Akademischer Verlag, 1993.
- [29] T. Fließbach. *Elektrodynamik*. Spektrum Akademischer Verlag, 1997.
- [30] J. M. Jauch and F. Rohrlich. *The theory of photons and electrons*. Springer-Verlag, 1976.
- [31] M.S. Longair. *High energy astrophysics – Volume 1: Particles, photons and their detection*. Cambridge University Press, 1992.
- [32] A.S. Kompaneets. The establishment of thermal equilibrium between photons and electrons. *Sov.Phys. JETP*, 31:876, 1956.
- [33] R. Weymann. The energy spectrum of radiation in the expanding universe. *Astrophysical Journal*, 145:560–571, 1966.
- [34] E. Reese, J.J. Mohr, J.E. Carlstrom, M. Joy, L. Grego, G.P. Holder, W.L. Holzappel, J.P. Hughes, S. K. Patel, and M. Donahue. Sunyaev-Zeldovich effect derived distances to the high redshift clusters MS 0451.6-0305 and CL 0016+16. *Astrophysical Journal*, 533:38–49, 2000.
- [35] J. Robert Buchler and William R. Yueh. Compton scattering opacities in a partially degenerate electron plasma at high temperatures. *Astrophysical Journal*, 210:440–446, 1976.
- [36] Naoki Itoh, Yasuharu Kohyama, and Satoshi Nozawa. Relativistic corrections to the Sunyaev-Zeldovich effect for clusters of galaxies. *Astrophysical Journal*, 502:7–15, 1998.

- [37] S.M. Molnar and M. Birkinshaw. Inverse compton scattering in mildly relativistic plasma. *Astrophysical Journal*, 523:78–86, 1999.
- [38] A. Cavaliere and R. Fusco-Femiano. X-rays from hot plasma in clusters of galaxies. *Astronomy and Astrophysics*, 49:137, 1976.
- [39] J.P. Hughes and M. Birkinshaw. A measurement of the Hubble constant from the X-ray properties and the Sunyaev-Zeldovich effect of CL 0016+16. *Astrophysical Journal*, 501:1–14, 1998.
- [40] S.K. Patel, M. Joy, J.E. Carlstrom, G.P. Holder, E.D. Reese, P.L.Gomez, J.P. Hughes, L. Grege, and W.L. Holzappel. The distance and mass of the galaxy cluster Abell 1995 derived from Sunyaev-Zeldovich effect and X-ray measurement. *Astrophysical Journal*, 542:37–48, 2000.
- [41] K. Grainge, W.F. Grainger, M.E. Jones, R. Kneissl, G.G. Pooley, and R. Saunders. Mapping of the SZ effect in the cluster CL 0016+16 with the Ryle Telescope. astro-ph/0102496, 2001.
- [42] D. Puy, L. Grenacher, Ph. Jetzer, and M. Signore. Asphericity of galaxy clusters and the Sunyaev-Zel'dovich effect. *Astronomy and Astrophysics*, 363:415–424, 2000.
- [43] S. Chandrasekhar. *Radiative transfer*. Clarendon Press, 1950.
- [44] E. Audit and F.L. Simmons. The kinematic Sunyaev-Zeldovich effect and transverse cluster velocities. *Mon. Not. R. Astron. Soc.*, 305:L27–L30, 1999.
- [45] M. Bersanelli, F.R. Bouchet, G. Efstathiou, M. Griffin, J.M. Lamarre, N. Mandolesi, H.U. Norgaard-Nielsen, O.Pace, J. Polny, J.L. Puget, J.Tauber, N. Vittorio, and S. Volonté. *COBRAS/SAMBA: A mission dedicated to imaging the anisotropies of the cosmic microwave background*. ESA, 1996.
- [46] S.L.W McMillan, M.P. Kowalski, and M.P. Ulmer. X-ray morphologies of Abell clusters. *Astrophysical Journal*, 70:723–730, 1989.
- [47] M. Abramovitz and I.A. Stegun. *Handbook of Mathematical Functions*. Dover Publications, Inc., New York, 1965.
- [48] I.N. Bronstein and K.A. Semendjajew. *Teubner-Taschenbuch der Mathematik*. B.G. Teubner Stuttgart, 1996.
- [49] Chandra X-ray observatory center. <http://chandra.harvard.edu/> .
- [50] European Space Agency homepage. <http://sci.esa.int/> .
- [51] MAXIPOL homepage. <http://www.physics.umn.edu/cosmology/maxipol/> .
- [52] PLANCK homepage. <http://astro.estec.esa.nl/SA-general/Projects/Planck/> .
- [53] XMM-Newton homepage. <http://sci.esa.int/home/xmm-newton/> .



# Abbildungsverzeichnis

2.1	Schwarzkörperspektrum für verschiedene Temperaturen . . . . .	13
2.2	Abstrahlcharakteristik eines oszillierenden Dipols . . . . .	15
2.3	Comptonstreuung an einem ruhenden Elektron . . . . .	16
2.4	Comptonstreuung an bewegten Elektronen . . . . .	17
3.1	Comptonisiertes Planck-Spektrum . . . . .	21
3.2	Intensitätsänderung in Abhängigkeit von der Temperatur $T_e$ . . . . .	23
3.3	Überlagerung von thermischem und kinetischem SZ-Effekt. . . . .	24
4.1	Die Zusammensetzung des Feldstärkevektors $\mathbf{E}$ . . . . .	30
4.2	Veranschaulichung allgemeiner elliptischer Polarisation . . . . .	31
4.3	Streusystem . . . . .	33
4.4	Ruhende Elektronenwolke . . . . .	35
5.1	Veranschaulichung der gewählten Basisvektoren . . . . .	38
5.2	Numerische Ergebnisse für den frequenzabhängigen Polarisationsgrad des CMB in der Richtung von großen Galaxienhaufen . . . . .	44
5.3	Vergleich der numerischen Ergebnisse für den Polarisationsgrad mit denen der Näherungsformel im Wien-Bereich . . . . .	44
5.4	Grad der Polarisation bei sehr hohen Frequenzen . . . . .	45
5.5	Relative Intensitätsänderung . . . . .	47
6.1	Geometrie der starr rotierenden Elektronenscheibe . . . . .	51
6.2	Kinetische Signaturen einer von der Seite betrachteten Elektronenscheibe entlang der Scheibenebene . . . . .	52
6.3	Rotationsellipsoid . . . . .	53
6.4	Relative Intensitätsänderung der CMBR in Richtung eines rotierenden Galaxienhaufens . . . . .	56
6.5	Temperaturdekrement in Richtung eines starr rotierenden Galaxienhaufens . . . . .	58
6.6	Schnitte durch das Zentrum eines starr rotierenden Galaxienhaufens . . . . .	59
6.7	Differenz zwischen dem maximalen Temperaturdekrement auf Grund des th-SZE mit und ohne zusätzliche Rotation . . . . .	59
6.8	Verschiebung des maximalen Temperaturdekrements . . . . .	61
6.9	Modifiziertes Rotationsprofil eines Galaxienhaufens . . . . .	63
6.10	Numerische Ergebnisse für die relative Intensitätsänderung der CMBR nach dem modifizierten Rotationsprofil im Vergleich zum Modell starrer Rotation . . . . .	65
7.1	Polarisationssignatur eines rotierenden Galaxienhaufens für $i = \pi/2$ . . . . .	71
7.2	Grad der Polarisation entlang der $y$ -Achse für $i = \pi/2$ . . . . .	71
7.3	Grad der zentralen Polarisation für $i = \pi/2$ . . . . .	72
7.4	Veranschaulichung der Größen $R, r, r_z, z_m$ und $R/\epsilon$ . . . . .	72
7.5	Polarisationssignatur eines rotierenden Galaxienhaufens für $i = 0$ . . . . .	74

7.6	Grad der Polarisierung in Abhängigkeit vom Abstand $r$ zum Zentrum für $i = 0$ für verschiedene $\gamma$ . . . . .	75
7.7	Grad der Polarisierung in Abhängigkeit vom Abstand $r$ zum Zentrum für $i = 0$ für verschiedene $R$ . . . . .	75
7.8	Grad der Polarisierung in Abhängigkeit vom Abstand $r$ zum Zentrum für $i = 0$ für unterschiedliche $\epsilon$ . . . . .	76
7.9	Berechnung von $\beta_{\perp, \text{Tr}}$ aus der zentralen Polarisierung . . . . .	78
7.10	Polarisationssignatur bei Überlagerung von Translation und Rotation für $i = 0$ . . . . .	80



# Tabellenverzeichnis

2.1	Wichtige Konstanten . . . . .	5
2.2	Astronomische Maßeinheiten . . . . .	5
3.1	Werte für die mit Hilfe des SZE bestimmte Hubble-Konstante . . . . .	27



## Akronyme

AGN	<u>A</u> ctive <u>G</u> alactic <u>N</u> ucleus
BOOMERANG	<u>B</u> alloon <u>O</u> bservation <u>O</u> f <u>M</u> illimetric <u>E</u> xtragalactic <u>R</u> adiation <u>a</u> nd <u>G</u> eophysics [13]
Chandra	Röntgensatellit der NASA [49]
CMB	<u>C</u> osmic <u>M</u> icrowave <u>B</u> ackground
CMBR	<u>C</u> osmic <u>M</u> icrowave <u>B</u> ackground <u>R</u> adiation
COBE	<u>C</u> osmic <u>B</u> ackground <u>E</u> xplorer [5]
ESA	<u>E</u> uropean <u>S</u> pace <u>A</u> gency [50]
FRW	<u>F</u> riedmann- <u>R</u> obertson- <u>W</u> alker
FIRAS	<u>F</u> ar <u>I</u> nfrared <u>A</u> bsolute <u>S</u> pectrophotometer
ICM	<u>I</u> ntra- <u>C</u> luster <u>M</u> edium
k-SZE	<u>k</u> inetischer <u>S</u> unyaev- <u>Z</u> eldovich- <u>E</u> ffekt (siehe Kap.3)
MAP	<u>M</u> icrowave <u>A</u> nisotropy <u>P</u> robe [15]
MAXIMA	<u>M</u> illimeter <u>A</u> nisotropy <u>e</u> Xperiment <u>I</u> Maging <u>A</u> rray [14]
MAXIPOL	Experiment an Bord von MAXIMA zu Messung der Polarisation des CMB [51]
PLANCK	Mission der ESA benannt nach <i>Max Planck</i> . (Früher: COBRA/SAMBA) [52]
RJ	<u>R</u> ayleigh- <u>J</u> eans
RW	<u>R</u> obertson- <u>W</u> alker
SZE	<u>S</u> unyaev- <u>Z</u> eldovich- <u>E</u> ffekt (siehe Kap.3)
th-SZE	<u>t</u> hermischer <u>S</u> unyaev- <u>Z</u> eldovich- <u>E</u> ffekt (siehe Kap.3)
w.m.l.s.	<u>w</u> ie <u>m</u> an <u>l</u> eicht <u>s</u> ieht
XMM-Newton	<u>X</u> -ray <u>M</u> ulti- <u>M</u> irror satellite [53]



## Danksagungen

Zuerst möchte ich mich bei Herrn Prof. Dr. Klaus Beuermann und meinem Betreuer Dr. Karl Mannheim für ihre Unterstützung bei der Anfertigung dieser Arbeit bedanken. Die wissenschaftlichen Möglichkeiten, welche mir während der Zeit an der Universitäts-Sternwarte Göttingen geboten wurden, haben sehr zum Gelingen dieser Arbeit beigetragen.

Besonderer Dank gilt auch Christian Hettlage, der mit mir gern physikalische und mathematische Fragen diskutiert hat, und dessen Anregungen stets sehr hilfreich waren. Meinem Zimmergenossen Thomas Bretz danke ich für seine ständige Hilfs- und Diskussionsbereitschaft zu allen Themen. Mein Dank gilt auch Tanja Kneiske, die mir bei Problemen jeglicher Art mit Rat und Tat beigestanden hat. Zudem danke ich Jens Kube für seine wertvollen Ratschläge und Anregungen. Dank auch an Dr. Klaus Reinsch und alle Mitglieder der Abteilung I für ihre Offenheit gegenüber sämtlichen Fragen.

Besonders bedanke ich mich bei Martin Feix, ohne den mein Studium in Göttingen sicher nicht so viel Freude gemacht hätte, für die vielen schönen Abende und interessanten Gespräche, sowie die große Hilfe bei der Durchsicht dieser Arbeit. Nicht zuletzt Dank an meine Zeitgenossen Ulrich Brandt-Pollmann, Kevin Bube, Bettina Hoffmann, Harald Jarzina und Annika Lohstroh, sowie Gernot Krause, Ivan Szendro, Dipankar Sarkar, Alexander Kröck, Sebastian Borck und allen anderen Kommilitonen an der Universität Hannover, ohne die mein bisheriges Studium nicht so abwechslungsreich gewesen wäre.

Ein Dank auch an Daniela Fischer, deren Gesellschaft mich immer inspirierte, und an meine Familie, die mich in jeglicher Hinsicht unterstützt und immer an mich geglaubt hat.